FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Bilangan Kompleks merupakan bilangan dengan hirarki tertinggi dalam sistem bilangan. Buku fungsi variabel kompleks ini disusun sebagai buku teks mahasiswa yang menempuh mata kuliah fungsi variabel kompleks. Mata kuliah fungsi variabel kompleks merupakan mata kuliah yang fundamental dan wajib bagi mahasiswa jurusan atau program studi matematika dan pendidikan matematika.

Buku ini memuat beberapa konsep terkait variabel kompleks diantaranya: sistem bilangan kompleks, fungsi variabel kompleks (fungsi analitik dan harmonik), fungsi elementer, integral kompleks, barisan dan deret bilangan kompleks.

Sistem bilangan kompleks terdiri dari sejarah, definisi dan operasi bilangan kompleks. Fungsi varibel kompleks terdiri dari definisi, pemetaan, limit fungsi, turunan fungsi, persamaan cauchy, fungsi analitik dan fungsi harmonik. Fungsi elementer terdiri dari fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik, dan invers fungsi. Integral kompleks terdiri dari fungsi kompleks dari variabel real, lintasan / lengkungan (contours), integral contour, teorema cauchy, teorema cauchy-goursat, perluasan teorema cauchy-goursat, daerah terhubung sederhana dan daerah terhubung ganda, teorema annulus, integral tak tentu, integral cauchy, derivatif fungsi analitik, teorema morera, teorema modulus maksimum, teorema dan asas liouvillie, dan teorema dasar dalam aljabar. Barisan dan deret bilangan kompleks terdiri dari barisan dan deret bilangan real, barisan bilangan kompleks, deret bilangan kompleks, deret taylor dan maclaurin, dan deret laurent.

UIN MATARAM PRESS
UIN MATARAM PRESS
GEDUNG RESEARCH CENTER LT.1 KAMPUS II UIN MATARAM
JL. GAJAH MADA NO. 100 JEMPONG BARU KOTA MATARAM

ISBN 978-623-8497-00-3
9 786238 497003

Dr. M. Syawahid, M. Pd

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

UIN MATARAM PRESS

UIN MATARAM PRESS

Dr. M. Syawahid, M. Pd

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Dr. M. Syawahid, M. Pd

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

UIN MATARAM PRESS

FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Penulis:
Dr. M. Syawahid, M. Pd

ISBN 978-623-8497-00-3

Editor:
Dr. Al Kusaeri, M.Pd.

Layout:
Tim UIN Mataram Press

Desain Sampul:
Tim Creative UIN Mataram Press

Penerbit:
UIN Mataram Press

Redaksi:
Kampus II UIN Mataram (Gedung Research Center Lt. 1)
Jl. Gajah Mada No. 100 Jempong Baru
Kota Mataram – NTB 83116
Fax. (0370) 625337 Telp. 087753236499
Email: uinmatarampress@gmail.com

Distribusi:
CV. Pustaka Egaliter (Penerbit & Percetakan)
Anggota IKAPI (No. 184/DIY/2023)
E-mail: pustakaegaliter@gmail.com
https://pustakaegaliter.com/

Cetakan Pertama, Desember 2023

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT kami panjatkan atas rahmat dan hidayahnya sehingga kami bisa menyelesaikan penyusunan Buku Ajar Fungsi Variabel Kompleks ini dengan baik.

Buku ajar Fungsi Variabel Kompleks ini kami susun sebagai acuan bagi mahasiswa sarjana (S1) program studi pendidikan matematika yang menempuh mata kuliah fungsi variabel kompleks. Buku ajar ini memuat definisi, teorema, contoh soal dan penyelesaian yang berkaitan dengan fungsi variabel kompleks, sehingga diharapkan dapat membantu mahasiswa dalam mengembangkan wawasan terkait variabel kompleks.

Penyusun menyampaikan ucapan terima kasih kepada LP2M Perguruan Tinge Keagamaan Islam Negeri yang telah berkenan memfasilitasi penerbitan buku ajar ini. Kami mengharapkan kritik dan saran yang konstruktif dari pembaca terkait isi dari bahan ajar ini guna penyusunan bahan ajar kedepan yang lebih baik. Semoga bahan ajar ini dapat berguna bagi civitas akademika Perguruan Tinge Keagamaan Islam Negeri pada khususnya dan bagi pembaca lain pada umumnya.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

BAB I
PENDAHULUAN

Pendidikan memegang peranan penting dalam pengembangan akademik dan personal manusia (Jhonston-wilder et al., 2011). Pengembangan akademik dan personal tersebut menekankan pada pembelajaran yang melibatkan pengembangan keterampilan intelektual, emosional, menejerial dan keterampilan lainnya (Rivai & Murni, 2010). Merespon hal tersebut, pemerintah Indonesia mencanangkan UU No. 20 tahun 2003 tentang system Pendidikan nasional yang mewajibkan siswa untuk aktif mengembangkan potensi untuk memiliki keterampilan yang diperlukan baik untuk diri sendiri, masyarakat, bangsa, dan negara (Undnag-Undang RI Nomor 20, Tahun 2003, Tentang Sistem Pendidikan Nasional., 2003).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang diajarkan dari sekolah dasar hingga ke perguruan tinggi. Pembelajaran matematika memberikan kesempatan kepada siswa dalam mengembangkan keterampilan akademik seperti pemahaman konsep, pemecahan masalah, komunikasi matematis, koneksi matematis, penalaran, dan pembuktian (NCTM, 2000). Pengembangan keterampilan itu tentu tidak hanya sampai Pendidikan tingkat menengah, tetapi juga untuk Pendidikan tingkat tinggi (perguruan tinggi).

Salah satu mata kuliah yang wajin ditempuh bagi mahasiswa Pendidikan matematika adalah fungsi variabel kompleks. Mata kuliah ini bertujuan untuk memperkenalkan dan menganalisis bilangan dan fungsi yang melibatkan bilangan kompleks. Keberadaan mata kuliah ini penting diberikan kepada mahasiswa sebagai bagian dari keberlanjutan pemahaman konsep mahasiswa dalam mengenal system bilangan yang lebih tinggi.

Mata kuliah Fungsi variabel kompleks mengharuskan mahasiswa lulus pada mata kuliah matematika sebelumnya yaitu mata kuliah kalkulus dan analisis real. Beberapa konsep yang dipelajari dalam mata kuliah ini adalah system bilangan kompleks, operasi bilangan kompleks, bentuk polar dan geometri bilangan kompleks, fungsi dengan peubah bilangan kompleks, fungsi elementer bilangan kompleks, integral bilangan kompleks, dan deret bilangan kompleks.

Beberapa penelitian mengungkap bahwa mahasiswa memiliki pemahaman konsep yang kurang terkait fungsi bilangan kompleks (A. Wahyuni & Hidayati, 2020; I. Wahyuni & Kharimah, 2017; T. Wahyuni et al., 2022). Beberapa kesulitan tersebut seperti kurang teliti dan kurang dalam pemahaman konsep dasar (Anam et al., 2022; I. Wahyuni & Kharimah, 2017).

Hasil penelitian tersebut juga mendukung kajian pendahuluan yang menunjukkan bahwa mahasiswa tadris matematika UIN Mataram memiliki pemahaman konsep yang kurang terkait bilangan dan fungsi bilangan kompleks. Rata-rata nilai akhir yang diperoleh mahasiswa masih kurang dari yang diharapkan. Selain itu, penyusunan bahan ajar untuk mata kuliah fungsi variabel kompleks belum pernah dilakukan di lingkungan civitas akademika UIN Mataram. Bahan ajar yang dipakai dalam melaksanakan perkuliahan masih bersumber dari bahan ajar yang masih menggunakan Bahasa inggris yang cukup sulit dipahami beberapa mahasiswa tadris matematika.

Berdasarkan kajian tersebut, penyusunan bahan ajar fungsi variabel kompleks perlu dilakukan sebagai sumber belajar yang bisa menunjang pemahaman konsep mahasiswa saat perkuliahan berlangsung maupun diluar perkuliahan. Bahan ajar fungsi variabel kompleks ini diharapkan mampu menjadi referensi bagi mahasiswa yang menempuh mata kuliah fungsi variabel kompleks.

Tujuan dari penyusunan bahan ajar fungsi variabel kompleks ini adalah menghasilkan bahan ajar yang dapat mendukung pengembangan pemahaman konsep dan penalaran mahasiswa dalam menempuh mata kuliah fungsi variabel kompleks. Adapun manfaat dari penyusunan bahan ajar ini adalah dapat menjadi referensi bagi mahasiswa dalam memahami konsep variabel kompleks baik dalam perkuliahan maupun di luar perkuliahan.

BAB II
SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

A. SEJARAH BILANGAN KOMPLEKS

Pada tahun 1494, Luca Pacioli (hidup sekitar 1445-1514) mengutarakan suatu pernyataan yang berani di dalam bukunya yang berjudul *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*, yaitu mustahil bagi kita untuk menyelesaikan suatu persamaan kubik. Sepuluh tahun kemudian, terbukti bahwa Pacioli salah. Hal ini dibuktikan oleh Scipione del Ferro (1465-1526) yang mampu persamaan *depressed cubic*, yaitu persamaan kubik yang tidak memiliki derajat dua. Bentuk umum *depressed cubic* adalah sebagai berikut

$$x^3 = px + q \dots\dots\dots\dots\dots..(1)$$

Dengan p dan q tidak negatif. Trik dari del Ferro adalah memisalkan $x = u + v$ yang disubstitusikan ke persamaan (1):

$$x^3 - px = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - p(u+v) = q$$

Misalkan lagi $3uv = p$, akan diperoleh

$$u^3 + v^3 = q \dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

dan

$$u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(3)$$

Jika persamaan (2) dimasukkan ke dalam persamaan (3) untuk menghilangkan v^3 , diperoleh

$$u^6 - qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

Sekilas, menyelesaikan persamaan (4) terlihat sulit. Namun, persamaan ini memiliki bentuk kuadratik untuk u^3 sehingga dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat diperoleh

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Ambil bagian yang positif saja, nilai u menjadi

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Dengan cara yang sama, didapatkan

$$v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Karena solusi dari persamaan (1) adalah $x = u + v$, dimasukkan nilai u dan v,

Perhatikan karena p dan q bernilai positif, secara eksplisit dapat diketahui bahwa nilai x di persamaan (5) selalu bernilai riil.

Namun, jika q bernilai negatif, persamaannya menjadi seperti berikut

Dan bagaimana jika $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$? Hal ini tidak dibahas oleh del Ferro, karena ia sendiri kebingungan. :D

Tiga puluh tahun setelah persamaan (6) muncul, Rafael Bombelli (hidup sekitar 1526-1572) melihat ada yang aneh dan paradoks dari persamaan ini. Jika $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, persamaan ini pastilah memuat bilangan kompleks yang perlu didefinisikan dengan cara yang baru dan radikal sebagai suatu kelas bilangan tersendiri. Sebagai contoh, Bombelli menyadari $x^3 = 15x + 4$ memiliki solusi [dengan menggunakan rumus persamaan (6)]:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Ketika Bombelli berjuang menyelesaikan paradoks ini, dia menemukan sebuah “ide gila”, yaitu dengan memisalkan $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni$ dan $\sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - ni$ (catatan: “ide gila” ini sekarang disebut konjugat dari suatu bilangan kompleks). Selanjutnya, untuk melihat nilai n dari $\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + ni$, Bombelli perlu menghitung $2 + 11i = (2 + ni)^3$, sehingga diperoleh $n = 1$. Dengan demikian,

$$x = 2 + i + 2 - i = 4$$

Sayangnya, ide brilian Bombelli tidak dapat diterima pada masa itu. Meski demikian, cukup jelas bahwa Bombelli sudah membantu membuka jalan untuk memahami bilangan kompleks.

Pada tahun 1685, John Wallis adalah orang pertama yang mencoba mengaitkan bilangan kompleks dengan grafik. Sumbu-*x* adalah bilangan riil dan sumbu-*y* adalah bilangan imajiner. John Wallis menyatakan bahwa bilangan kompleks hanyalah sebuah titik pada bidang, tetapi pendapatnya pun diabaikan. Pada tahun 1777, Euler menegaskan $i = \sqrt{-1}$ sehingga bilangan kompleks dapat lebih mudah dipahami. Akhirnya, sekitar tahun 1804, ada ilmuwan yang setuju dengan pendapat John Wallis mengenai grafik bilangan imajiner, yaitu Abbe Buee. Kemudian, tahun 1806, Jean Robert Argand menuliskan bagaimana cara menggambar bilangan kompleks pada bidang, yang sampai sekarang bidang ini disebut dengan diagram Argand. Carl Friedrich Gauss membuat ide diagram Argand semakin populer pada tahun 1831. Gauss juga yang menyebut notasi milik Descartes $a + bi$ sebagai **bilangan kompleks**.

Di masa modern saat ini, bilangan imajiner *i* (sebagai bagian dari bilangan kompleks) memiliki manfaat yang sangat beragam. Para insinyur menggunakannya untuk mempelajari resonansi. Bilangan kompleks juga membantu kita untuk memahami aliran fluida di sekitar benda, seperti aliran air di sekitar pipa. Selain itu, bilangan kompleks digunakan pada sirkuit listrik dan membantu mengirimkan gelombang radio. Dapat dibayangkan jika tidak ada *i*, sistem komunikasi melalui telepon ataupun mendengarkan siaran radio tidak akan ada. Sejarah bilangan kompleks pun memang sangat kompleks, dengan dipenuhi oleh matematikawan yang tidak percaya dan sebagian matematikawan lain yang berusaha meyakinkan bahwa bilangan kompleks itu nyata (Quita, 2014).

B. DEFINISI BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan Kompleks dapat didefinisikan sebagai pasangan berurutan bilangan real *x* dan *y*, disimbolkan dengan *z* dan dituliskan dalam bentuk $z = x + yi$ dengan $x, y \in R$ dan $i = \sqrt{-1}$ (Ahlfors., 1979; Brown & Churchill, 2014; Pathak et al., 2016).

Secara matematis bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam himpunan:

$$\boldsymbol{C = \{z \middle| z = x + iy;\ x, y\ \in\ R, i^2 = -1\}}$$

Bilangan $\sqrt{-1}$ atau yang disimbolkan dengan *i* disebut sebagai bilangan *imaginer*. Aritmatik dari bilangan *imaginer* dapat dituliskan sebagai berikut.

$\sqrt{-1} + \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$

$i^2 = i \times i == \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$i^3 = i^2 \times i == -1 \times i = -i$

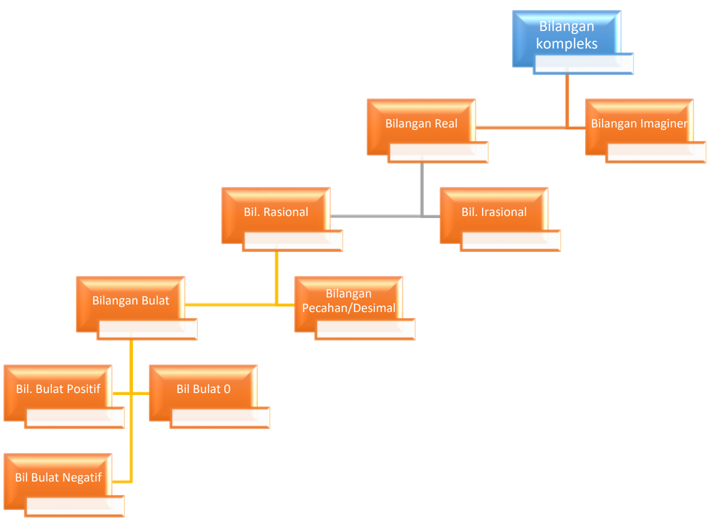
$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ dan seterusnya.

Dalam bilangan kompleks bilangan real *x* sering disebut sebagai bagian Real ditulis *x* = Re dan bilangan real *y* disebut bagian *Imaginer*, ditulis *y* = Im. Jika bagian *imaginer* $y = 0$ atau dapat ditulis $z = x$, maka bilangan kompleks tersebut adalah bilangan real. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa bilangan real x dapat dinyatan sebagai bilangan kompleks dengan bentuk $z = x + 0i$.

Dua bilangan kompleks dikatakan sama jika dan hanya jika bagian Real dan *Imaginer*nya sama. Misalnya $z_1 = 3 - 2i$ dan $z_2 = x + yi$. Jika $z_1 = z_2$ maka haruslah $x = 3$ dan $y = -2$. Bilangan kompleks Nol atau $z = 0$ dapat dinyatan jika dan hanya jika bagian real dan bagian *imaginer*nya sama dengan nol atau dapat ditulis $z = 0 + 0i$.

Yang perlu menjadi catatan penting adalah Bilangan Kompleks tidak dapat dibandingkan. Misalkan $z_1 = 3 - 2i$ dan $z_2 = 4 - 2i$, maka $z_1 < z_2$ adalah ***pernyataan yang salah***.

Secara hirarki bilangan, bilangan kompleks menempati urutan terartas dari sistim bilangan. Hirarki tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut.



Gambar 1. Hirarki Bilangan Kompleks

C. OPERASI BILANGAN KOMPLEKS

Terdapat dua jenis operasi dalam bilangan kompleks yaitu operasi *Uner* dan operasi *Biner*.

1. Operasi Uner

a. Negatif

Negative dari bilangan kompleks meliputi negative bentuk real dan bentuk *imaginer*nya.

Misalkan $z = x + yi$, negatif dari z adalah

$$-z = -x - yi$$

Contoh 1.1

Diketahui $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 2 - 3i$ tentukan $-z_1\ dan - z_2$!

Solusi

$-z_1 = -2 - 3i$

$-z_2 = -2 + 3i$

b. Konjugat

Konjugat dari bilangan kompleks adalah negative dari salah satu bentuk real atau bentuk *imaginer*.

Misalkan $z = x + yi$, maka konjugat dari z adalah

$$\bar{z} = x - yi$$

Misalkan $z_1 = 2 + 3i$ maka $-\overline{z_1} = 2 - 3i$. Misalkan $z_2 = 2 - 3i$, maka $-\overline{z_2} = 2 + 3i$

Catatan: penggunaan operasi konjugat akan lebih banyak dibahas pada operasi pembagian.

2. Operasi Biner

a. Penjumlahan dan pengurangan

Operasi penjumlahan dan pengurangan pada bilangan dilakukan dengan menjumlahkan/mengurangkan bentuk rill dengan bentuk rill dan bentuk *imaginer* dengan bentuk *imaginer*.

Misalkan $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ maka operasi penjumlahan antara z_1 dan z_2 adalah

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Misalkan $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ maka operasi penjumlahan antara z_1 dan z_2 adalah

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Contoh 1.2

Diketahui $z_1 = 2 + 4i$ dan $z_2 = 3 - 6i$ tentukan $z_1 + z_2$ dan $z_1 + z_2$?

Solusi

$z_1 + z_2 = (2 + 4i) + (3 - 6i) = (2 + 3) + (4 + (-6))i = 5 - 2i$

$z_1 - z_2 = (2 + 4i) - (3 - 6i) = (2 - 3) + \big(4 - (-6)\big)i = -1 + 10i$

b. Perkalian

Operasi perkalian pada bilangan kompleks dilakukan dengan mengalikan bentuk rill dengan bentuk rill, bentuk rill dengan kompleks, bentuk kompleks dengan rill dan bentuk kompleks dengan bentuk kompleks.

Misalkan $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ maka operasi perkalian antara z_1 dan z_2 adalah

$$z_1z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2$$
$$= ac + (ad+bc)i - bd$$
$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

Contoh 1.3

Misalkan $z_1 = 2+4i$ dan $z_2 = 3-6i$ tentukan $z_1 \times z_2$!

Solusi

$z_1z_2 = (2+4i)(3-6i) = 2.3 + 2.(-6i) + 4i.3 + 4i.(-6i) = 6 - 12i + 12i - 24.i^2 = 6 - 24.(-1) = 6 + 24 = 30$

c. Pembagian

Pembagian pada bilangan kompleks dapat dilakukan dengan mengalikan penyebut dengan konjugatnya.

Misalkan $z_1 = a+bi$ dan $z_2 = c+di$ maka operasi pembagian antara z_1 dan z_2 adalah

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}.\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(cb-ad)i}{(c^2+d^2)} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(cb-ad)}{c^2+d^2}i$

Contoh 1.4

Misalkan $z_1 = 2+4i$ dan $z_2 = 3-6i$ tentukan $\frac{z_1}{z_2}$!

Solusi

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+4i}{3-6i} = \frac{2+4i}{3-6i}.\frac{3-6i}{3-6i} = \frac{2.3+4.(-6)}{3^2+(-6)^2} + \frac{\left(4.3-2.(-6)\right)i}{3^2+(-6)^2} = \frac{-18}{45} + \frac{24}{45}i$

D. SIFAT ALJABAR BILANGAN KOMPLEKS

Sifat Aljabar bilangan kompleks sama seperti sifat aljabar bilangan rill. Untuk operasi penjumlahan dan pengurangan berlaku sifat Komutatif, Asosiatif, unsur Identitas, Invers dan distributive.

1. Komutatif

   a. Penjumlahan

      Untuk setiap $z_1, z_2 \in C$ berlaku

      $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

      Bukti:

      $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ &= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \\ & z_2 + z_1 \end{aligned}$$

   b. Perkalian

      Untuk setiap $z_1, z_2 \in C$ berlaku

      $z_1 z_2 = z_2 z_1$

      Bukti:

      $$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2\ ) + i(y_1x_2 + x_1\ y_2) \\ &= (x_2x_1 - y_2y_1\ ) + i(y_2x_1 + x_2\ y_1) \\ &= z_2 z_1 \end{aligned}$$

2. Asosiatif

   a. Penjumlahan

      Untuk setiap $z_1, z_{2,} z_3 \in C$ berlaku

      $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Bukti:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1) + ((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3))$$

$$= (x_1 + iy_1) + ((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3))$$

$$= (x_1 + (x_2 + x_3)) + i(y_1 + (y_2 + y_3))$$

$$= ((x_1 + x_2) + x_3) + i((y_1 + y_2) + y_3)$$

$$= ((x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)) + (x_3 + iy_3)$$

$$= (z_1 + z_2) + z_3$$

b. Perkalian

Untuk setiap $z_1, z_{2,} z_3 \in C$ berlaku

$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$

Bukti:

$$z_1(z_2 z_3) = (x_1 + iy_1)((x_2 + iy_2)(x_3 + iy_3))$$

$$= (x_1 + iy_1)((x_2 x_3) - (y_2 y_3) + i(x_2 y_3 + x_3 y_2))$$

$$= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 x_3 y_2) + i(x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3)$$

$$= (x_3(x_1 x_2 - y_1 y_2) + y_3(y_1 y_2 - x_1 y_2)) + i(x_3(x_1 y_2 + y_1 x_2) + y_3(x_1 x_2 - y_1 y_2))$$

$$= \left((x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)\right)(x_3 + iy_3)$$

$$= (z_1z_2)z_3$$

3. Distributif

   Untuk setiap $z_1, z_{2,}z_3 \in \mathbb{C}$ berlaku $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$

   Bukti:

$$z_1(z_2 + z_3) = (x_1 + iy_1)((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3))$$

$$= (x_1 + iy_1)((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3))$$

$$= x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3) + i(x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3))$$

$$= (x_1x_2 + x_1x_3 - y_1y_2 - y_1y_3) + i(x_1y_2 + x_1y_3 + y_1x_2 + y_1x_3)$$

$$= \left((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3)\right) + i((x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3))$$

$$= \left((x_1x_2 - y_1y_2) + i((x_1y_2 + y_1x_2)\right) + \left((x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + y_1x_3)\right)$$

$$= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1)(x_3 + iy_3)$$

$$= z_1z_2 + z_1z_3$$

4. Unsur Identitas

   a. Identitas Penjumlahan

      Terdapat $0 = (0,0) \in \mathbb{C}$ sehingga untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ berlaku $z + 0 = z$

Bukti:

Misalkan: $z = (x + iy)$

$$z + 0 = (x + iy) + (0 + i0)$$
$$= (x + 0) + i(y + 0)$$
$$= (x + iy)$$
$$= z$$

b. Identitas Perkalian

Terdapat 1 = (1,0) $\in \mathbb{C}$ sehingga untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ berlaku z.1 = z

Bukti:

Misalkan: $z = (x + iy)$

$$z.1 = (x + iy)(1 + i0)$$
$$= (x - 0) + i(0 + y)$$
$$= (x + iy)$$
$$= z$$

5. Inverse (Lawan)

a. Invers Penjumlahan

Untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ terdapat $-z \in \mathbb{C}$ sehingga berlaku $z + (-z) = 0$ ($-z$ inverse dari z)

Bukti:

Misalkan $z = (x + iy)$ maka $-z = -x - iy$

$$z + (-z) = (x + iy) + (-x - iy)$$
$$= (x - x) + i(y - y)$$
$$= 0$$

b. Invers Perkalian

Untuk setiap $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ terdapat $z^{-1} \in \mathbb{C}$ berlaku $zz^{-1} = 1$ (z^{-1} inverse dari z). untuk mencari nilai dari z^{-1} akan digunakan sifat dari invers.

Misalkan $z = a + ib$; $a, b \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ dan $z^{-1} = x + iy$ maka diperoleh zz^{-1}=1.

$(a + ib)(x + iy) = 1$

$\Leftrightarrow ax + iay + ibx - by = 1 + i0$

$\Leftrightarrow ax - by + i(bx + ay) = 1 + i0$

Sehingga diperoleh persamaan

$ax - by = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1)$

$bx + ay = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2)$

System persamaan di atas dapat diselesaikan dengan eliminasi.

$$\begin{aligned} ax - by = 1 | \times a | a^2x - aby = a \\ bx + ay = 0 | \times b | b^2x + aby = 0 + \end{aligned}$$

$$(a^2 + b^2)x = a$$

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$bx + ay = 0$

$$b\left(\frac{a}{a^2 + b^2}\right) + ay = 0$$

$$ay = -\frac{ab}{a^2 + b^2}$$

$$y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Jadi $z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}$ sehingga zz^{-1}=1.

Contoh 1. 5

1. Sederhanakan bilangan kompleks berikut ini dalam bentuk $z = x + yi$!
   a. $z = \frac{3+2i}{2-i}$
   b. $z = \frac{i}{1-i} + \frac{2+i}{i}$
   c. $z = \frac{5i}{(3-i)(2+3i)}$
   d. $z = \frac{2i}{3-5i} : \frac{4i}{4+3i}$
2. Misalkan $z = 5 + 3i$, tentukan
   a. $z\bar{z}$
   b. $\bar{z} + z$
   c. $z^2\bar{z}$
   d. $\bar{z}^2 z$

Solusi

1.
   a. $z = \frac{3+2i}{2-i}$

   $$z = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{3+2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{(6-2)+(3+4)i}{4+1} = \frac{4+7i}{5} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$$

   b. $z = \frac{i}{1-i} + \frac{2+i}{i}$

   $$\begin{aligned} z &= \frac{i}{1-i} + \frac{2+i}{i} \\ &= \frac{i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} + \frac{2+i}{i} \times \frac{i}{i} \\ &= \frac{i-1}{1+1} + \frac{2i-1}{-1} \\ &= \frac{i-1}{2} + \frac{2i-1}{-1} \\ &= \frac{i-1}{2} - \frac{4i-2}{2} = \frac{i-2-4i+2}{2} = \frac{-3}{2}i \end{aligned}$$

c. $z = \frac{5i}{(3-i)(2+3i)}$

$z \quad = \frac{5i}{(3-i)(2+3i)}$

$= \frac{5i}{(6+3)+(9-3)i}$

$= \frac{5i}{9+6i} = \frac{5i}{9+6i} \times \frac{9-6i}{9-6i} = \frac{45i+30}{81+36} = \frac{30}{117} + \frac{45}{117}$

d. $z = \frac{2i}{3-5i} : \frac{4i}{4+3i}$

$z \quad = \frac{2i}{3-5i} : \frac{4i}{4+3i}$

$= \frac{2i}{3-5i} \times \frac{4+3i}{4i}$

$= \frac{8i-6}{12i+20} = \frac{4i-3}{6i+10} = \frac{4i-3}{6i+10} \times \frac{6i-10}{6i-10} =$

$\frac{(-24+30)+(-40-18)i}{-36-100} = -\frac{6}{136} + \frac{58}{136}i$

2. Diketahui: $z = 5 + 3i, \bar{z} = 5 - 3i$

a. $z\bar{z} = (5 + 3i)(5 - 3i)$

$z\bar{z} = 5 \times 5 - 5 \times 3i + 3i \times 5 - 3i \times 3i$

$z\bar{z} = 25 - 15i + 15i - 9i^2$

$z\bar{z} = 25 - 9(-1)$

$z\bar{z} = 25 + 9 = 34$

b. $\bar{z} + z = 5 - 3i + 5 + 3i$

$\bar{z} + z = 10$

c. $z^2\bar{z} = (5 + 3i)^2(5 - 3i)$

$z^2\bar{z} = (25 + 2 \times 5 \times 3i + 9 \times i^2)(5 - 3i)$

$z^2\bar{z} = (25 + 30i - 9)(5 - 3i)$

$z^2\bar{z} = (16 + 30i)(5 - 3i)$

$z^2\bar{z} = 16 \times 5 - 16 \times 3i + 30i \times 5 - 30i \times 30i$

$$z^2\bar{z} = 80 - 48i + 150i - 900i^2$$

$$z^2\bar{z} = 80 + 102i + 900$$

$$z^2\bar{z} = 980 + 102i$$

d. $\bar{z}^2 z = (5 - 3i)^2(5 + 3i)$

$$\bar{z}^2 z = (25 - 2 \times 5 \times 3i + 9 \times i^2)(5 + 3i)$$

$$\bar{z}^2 z = (25 - 30i - 9)(5 + 3i)$$

$$\bar{z}^2 z = (16 - 30i)(5 + 3i)$$

$$\bar{z}^2 z = 16 \times 5 + 16 \times 3i - 30i \times 5 - 30i \times 30i$$

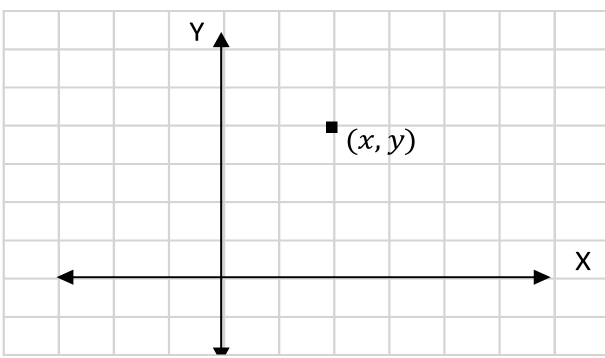
$$\bar{z}^2 z = 80 + 48i - 150i - 900i^2$$

$$\bar{z}^2 z = 80 - 102i + 900$$

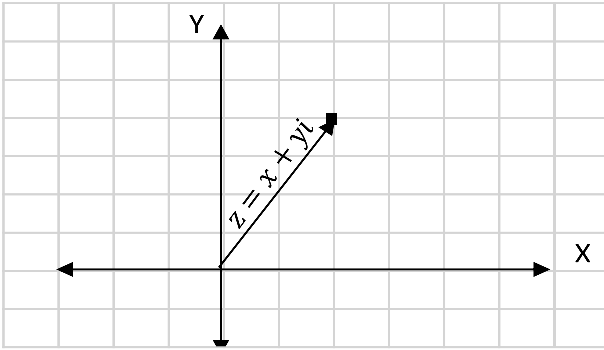
$$\bar{z}^2 z = 980 - 102i$$

E. BENTUK DAN GEOMETRI BILANGAN KOMPLEKS

Bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dipandang sebagai sebuah titik (x, y) dengan sumbu-X adalah sumbu real dan sumbu-Y adalah sumbu *imaginer*. Selain itu bilangan kompleks z juga dapat dipandang sebagai sebuah garis atau vektor dari titik pusat ke titik (x, y) dengan panjang $|z|$ (Brown & Churchill, 2009). Berikut gambar geometri dari bilangan kompleks z.



Gambar 2. Geometri Bilangan Komples z sebagai Titik

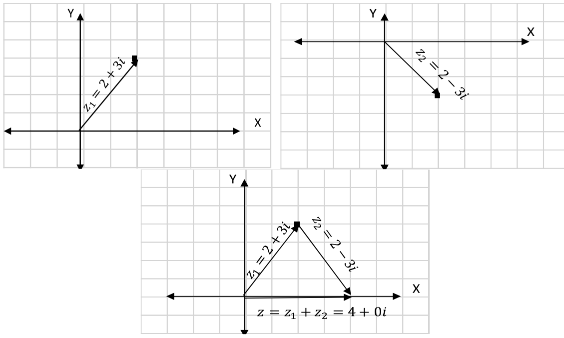


Gambar 3. Geometri Bilangan Kompleks z sebagai Garis (Vektor)

Selain dipandang sebagai sebuah titik dan garis (vektor), bilangan kompleks juga memiliki bentuk yang lain, yaitu bentuk polar (kutub) dan bentuk euler. Pembahasan terkait bentuk polar dan bentuk euler akan dibahas pada materi selanjutnya.

Bentuk Titik dan Vektor

Berkaitan dengan bentuk vektor dari bilangan kompleks, maka untuk menentukan penjumlahan dan pengurangan dua bilangan komples dilakukan dengan proses vektor. Misalnya $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 2 - 3i$ maka $z_1 + z_2$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 4. Bentuk Vektor Bilangan Kompleks $z_1, z_2, z_1 + z_2$

Panjang suatu vektor z disebut sebagai **Modulo** dan dinyatakan dengan $|z|$. Untuk menentukan modulo dari bilangan kompleks z dapat menggunakan teorema phytagoras. Misalnya $z = x + yi$ maka

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Modulo dari bilangan kompleks z merupakan bilangan rill dan dapat dinyatakan dalam ketaksamaan atau pertaksamaan. Berikut beberapa sifat dari modulo bilangan kompleks.

1. $|z|^2 = (Re\ z)^2 + (Im\ z)^2$

   Sifat ini dapat ditunjukkan dengan definisi dari modulo

   $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

   Kedua Ruas dikuadratkan

   $$|z|^2 = x^2 + y^2$$

   $$|z|^2 = (Re\ z)^2 + (Im\ z)^2$$

2. $|z| \geq |Re\ z| \geq Re\ z$ dan $|z| \geq |Im\ z| \geq Im\ z$

Misal $z = x + yi$ dengan $x = Re\ z$ dan $y = Im\ z$. Dari sifat nilai mutlak, jelas bahwa

$$x \leq |x|\ atau\ Re\ z \leq |Re\ z| \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$|x| \leq |z|\ atau\ |Re\ z| \leq |\ z| \ldots\ldots\ldots (2)$$

Dari (1) dan (2) dapat ditulis

$$|z| \geq |Re\ z| \geq Re\ z$$

Untuk kasus yang selanjutnya dapat menganalogikakan dengan kasus di atas dengan mengganti $Re\ z$ dengan $Im\ z$.

3. $|z|^2 = z\bar{z}$

   Misal $z = x + yi$ dengan $\bar{z} = x - yi$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots. (1)$$

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \ldots\ldots\ldots. (2)$$

   Dari (1) dan (2), maka $|z|^2 = z\bar{z}$

4. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

   Misal : $z_1 = x_1 + iy_1\ dan\ z_2 = x_2 + iy_2$

   $z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i$

   $|z_1 z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$

   $=$

   $\sqrt{(x_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 + (x_1y_2)^2 + 2x_1y_2x_2y_1 + (x_2y_1}$

   $= \sqrt{{x_1}^2{x_2}^2 + {y_1}^2{y_2}^2 + {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2}$

   $= \sqrt{({x_1}^2 + {y_1}^2)({x_2}^2 + {y_2}^2)}$

   $= \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}$

   $= |z_1||z_2|$

   Atau dengan sifat 3

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2})$$

$$= (z_1 z_2)(\overline{z_1}\,\overline{z_2})$$

$$= z_1\overline{z_1}\; z_2\overline{z_2}$$

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

5. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Misalkan: $z = \frac{z_1}{z_2} \leftrightarrow z z_2 = z_1$

$$|z_1| = |z z_2| = |z||z_2|$$

$$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \qquad , (z_2 \neq 0).$$

6. Ketaksamaan Segitiga $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Untuk membuktikan ketaksamaan segitiga ini, akan ditunjukkan masing-masing bagian.

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2})$$

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\overline{z_1} + \left(z_1\overline{z_2} + \overline{z_{1\overline{z_2}}}\right) + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + \left(z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2$$

$$\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2$$

$$\leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

$$\therefore |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Tetapi

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2|z_1||z_2|;$$

Bukti :

❖ Akan dibuktikan $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

Jelas $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = \dfrac{z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}}{2}$

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}}$

Terbukti bahwa $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

❖ Akan dibuktikan bahwa $2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

Jelas $2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le \left|z_1\overline{z_2}\right|$ (Sifat 3)

Menurut sifat (3), terbukti $\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le \left|z_1\overline{z_2}\right|$ (kedua ruas dikalikan dengan 2)

$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

Terbukti bahwa $2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \le 2\left|z_1\overline{z_2}\right|$

❖ Akan dibuktikan bahwa $2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2|z_1||z_2|$

Jelas $2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2|z_1|\left|\overline{z_2}\right|$ karena $\left|\overline{z_2}\right| = |z_2|$ (sifat 11), maka

$\Leftrightarrow 2|z_1||z_2|$

Terbukti bahwa $2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2|z_1||z_2|$

$\therefore$ terbukti bahwa

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) \leq 2\left|z_1\overline{z_2}\right| = 2|z_1||z_2|$$

Jadi

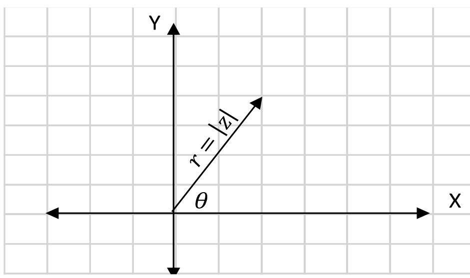
$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2,$$

atau

$$|z_1 + z_2|^2 \leq \left(|z_1| + |z_2|\right)^2.$$

Bentuk Polar

Bilangan Kompleks sebelumnya dapat ditulis dalam bentuk vektor $z = x + yi$. Bentuk vektor tersebut dapat diubah kedalam bentuk polar atau bentuk kutub.



Gambar 5. Bentuk Polar Bilangan Kompleks

Di mata kuliah kalkulus telah dipelajari tentang perubahan koordinat titik atau koordinat cartesius (x, y) ke koordinat kutub (r, θ)

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ ---------→ $y = r\sin\theta$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$ ---------→ $x = r\cos\theta$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ ---------→ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$z = x + yi = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Jadi bentuk polar/kutub dari bilangan kompleks adalah

$$\boldsymbol{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Dengan

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

r disebut sebagai **Modulo** dan θ disebut sebagai **Argumen** (Ar)

Contoh 1.6

Nyatakan bilangan kompleks berikut ke dalam bentuk polar.

a. $z = 1 + i$ b. $z = 1 - i$ c. $z = -1 + i$ d. $z = i$ e. $z = -i$

Penyelesaian

a. $z = 1 + i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$x\ dan\ y$ masing-masing positif, berarti argument θ berada pada kuadran 1.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = 45^0$$

Sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$$

b. $z = 1 - i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

x bernilai positif dan y bernilai negatif, berarti argument θ berada pada kuadran 4.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{1} = \tan^{-1} -1 = 315^0$$

Sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$$

c. $z = -1 + i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

x bernilai negatif dan y bernilai positif, berarti argument θ berada pada kuadran 2.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \tan^{-1} -1 = 135^0$$

Sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \sqrt{2}(\cos 315^0 + i\sin 315^0)$$

d. $z = i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = 1$$

x bernilai nol dan y bernilai positif, berarti argument θ berada pada kuadran 1. Untuk mencari argument, tidak bisa menggunakan $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ karena akan mengakibatkan nilai tak hingga. Dalam kasus ini akan digunakan $\sin^{-1}\frac{y}{r}$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \sin^{-1}\frac{1}{1} = \sin^{-1} 1 = 90^0$$

Sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos 90^0 + i\sin 90^0)$$

e. $z = -i$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2} = 1$$

x bernilai nol dan y bernilai negatif, berarti argument θ berada pada kuadran 3. Untuk mencari argument, tidak bisa menggunakan $\tan^{-1}\frac{y}{x}$ karena akan mengakibatkan nilai tak hingga. Dalam kasus ini akan digunakan $\sin^{-1}\frac{y}{r}$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \sin^{-1}\frac{-1}{1} = \sin^{-1} -1 = 270^0$$

Sehingga

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = (\cos 270^0 + i\sin 270^0)$$

Contoh 1.7

Nyatakan bilangan kompleks berikut ke dalam bentuk vektor.

a. $z = 4(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$

b. $z = 10(\cos 150^0 + i\sin 150)$

Penyelesaian

a. $z = 4(\cos 60^0 + i\sin 60^0)$

$$r = 4, \theta = 60^0$$

$$x = r\cos\theta = 4.\cos 60^0 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$y = r\sin\theta = 4.\sin 60^0 = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Jadi $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

b. $z = 10(\cos 150^0 + i\sin 150)$

$$r = 10, \theta = 150^0$$

$$x = r\cos\theta = 10.\cos 150^0 = 10.\cos(180 - 30)$$

$$= 10. -\cos 30 = 10 \times -\frac{\sqrt{3}}{2} = -5\sqrt{2}$$

$$y = r\sin\theta = 10.\sin 150^0 = 10.\sin(180 - 30)$$

$$= 10.\sin 30 = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

Jadi $z = -5\sqrt{3} + 5i$.

Bentuk Euler

Bilangan kompleks dalam bentuk polar dapat diubah menjadi bentuk lain yang disebut bentuk euler. Disebut bentuk euler karena menggunakan formula euler. Formula euler ini didasarkan pada penggunaan deret McLaurin. Deret McLaurin dari $\sin\theta$, $\cos\theta$ dan e^{θ} dapat ditulis sebagai berikut.

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\text{è}^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\text{è}^6}{6!} + \cdots$$

$$e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\text{è}^4}{4!} + \cdots$$

Untuk $e^{i\theta}$ dapat ditulis

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\text{è})^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\text{è}^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\text{è}^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\text{è}^6}{6!} + \cdots\right)$$

$$+ i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\text{è}^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Formula di atas sering disebut formula euler.

Dengan demikian bilangan kompleks bentuk polar dapat ditulis dalam bentuk euler sebaga berikut.

$$\boldsymbol{z} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = \boldsymbol{re^{i\theta}}$$

Contoh 1.8

Tentukan bentuk euler dari $z = 1 + i$!

Solusi

$$x = 1, y = 1$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$x\ dan\ y$ masing-masing positif, berarti argument θ berada pada kuadran 1.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \tan^{-1} 1 = 45^0$$

Sehingga bentuk euler dari $z = 1 + i$ dapat ditulis

$$z = \sqrt{2}e^{i45^0}$$

F. BENTUK PANGKAT BILANGAN KOMPLEKS

Bentuk pangkat dari bilangan kompleks sama dengan bentuk pangkat dari bilangan rill yang merupakan perkalian berulang dari bilangan tersebut, namun sedikit berbeda dengan bilangan kompleks bentuk polar yang bentuk pangkatnya lebih mudah diselesaikan dengan rumus **de Moivre** (Dedy & Sumiaty, 2001).

Bentuk Vektor

Misal $z = x + yi$, berikut akan dijabarkan bentuk pangkat dari z

$z^2 = zz = (x + yi)(x + yi) = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$z^3 = zz^2 = (x + yi)\big((x^2 - y^2) + 2xyi\big) = (x^3 - xy^2 - 2xy^2) + (3x^2y - y^3)i$

dan seterusnya.

Perhitungan bentuk pangkat bilangan kompleks bentuk vektor juga dapat menggunakan segitiga pascal.

$$\begin{aligned} z^4 &= (x + yi)^4 \\ &= x^4 + 4x^3yi + 6x^2(yi)^2 + 4x(yi)^3 + (yi)^4 \\ &= x^4 + 4x^3yi - 6x^2y^2 - 4xy^3i + y^4 \\ &= (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + (4x^3y - 4xy^3)i \end{aligned}$$

Bentuk Euler

Misal $z = re^{i\theta}$maka bentuk pangkat dari z dapat dijabarkan sebagai berikut.

$z^2 = zz = re^{i\theta}re^{i\theta} = r^2e^{2\theta i}$

$z^3 = zz^2 = re^{i\theta}r^2e^{2\theta i} = r^3e^{3\theta i}$

Secara umum bentuk pangkat dari bilangan kompleks bentuk euler dapat dituliskan

$$z^n = r^ne^{n\theta i}$$

Bentuk Polar

Misal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, maka bentuk pangkat dari z dapat dijabarkan sebagai berikut.

$z^2 = zz \quad = [r(\cos\theta + i\sin\theta)][r(\cos\theta + i\sin\theta)]$

$$= r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta +$$

$2i\sin\theta\cos\theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$

Disisi lain

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

Sehingga

$\cos 2\theta + i\sin 2\theta$

$$= \cos^2\theta - \sin^2\theta + 2i\sin\theta\cos\theta \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Dari (a) dan (b)

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

Kasus untuk z^3 juga akan berlaku

$$z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$$

Sehingga secara umum bentuk pangkat dari bilangan kompleks bentuk kutub dapat dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

Bentuk

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

Sering disebut sebagai rumus ***de Moivre***.

Contoh 1.9

Nyatakan bilangan kompleks berikut ke dalam bentuk polar: a. $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$ b. $z = (-1 + i)^6$

Solusi

a. $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^6$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

x bernilai positif dan y bernilai negative. Berarti θ berada di kuadran 4.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{-1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{3} = 330^0$$

$$z = [2(\cos 330^0 + i\sin 330^0)]^6$$

$$= 2^6(\cos 330^0 + i\sin 330^0)^6$$

$$= 2^6(\cos 6\times 330^0 + i\sin 6\times 330^0)$$

$$= 64(\cos 1980^0 + i\sin 1980^0)$$

b. $z = (-1+i)^6$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

x bernilai negatif dan y bernilai positif. Berarti θ berada di kuadran 2.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{-1} = \tan^{-1} -1 = 135^0$$

$$z = \left[\sqrt{2}(\cos 135^0 + i\sin 135^0)\right]^6$$

$$= \sqrt{2}^6(\cos 135^0 + i\sin 135^0)^6$$

$$= 2^3(\cos 6\times 135^0 + i\sin 6\times 135^0)$$

$$= 8(\cos 810^0 + i\sin 810^0)$$

G. BENTUK AKAR BILANGAN KOMPLEKS

Seperti diketahui bahwa bentuk akar merupakan kebalikan dari bentuk pangkat. Maka untuk menentukan bentuk akar dari bilangan kompleks, dapat menggunakan konsep bentuk pangkat bilangan kompleks. Untuk bentuk akar, bilangan kompleks bentuk vektor tidak memiliki ketentuan atau rumus yang dapat diturunkan, akan tetapi bilangan kompleks bentuk polar dan bentuk euler dapat diturunkan menjadi rumus tersendiri.

Bentuk polar

Misal $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$ dan $z_0 = z^{\frac{1}{n}}$ atau $z_0{}^n = z$

Dari permislaan di atas, dapat ditulis identitas

$$z_0{}^n = z$$

$$r_0{}^n(\cos n\theta_0 + i\sin n\theta_0) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Dari identitas di atas, berarti

$r_0{}^n = r$ --------→ $r_0 = r^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$

$\cos n\theta_0 = \cos\theta$ --------→ $n\theta_0 = \theta + 2k\pi$ →$\theta_0 = \frac{\theta+2k\pi}{n}, k = 0,1,2..(n-1)$

Dari persamaan di atas, dapat ditulis

$$z^{\frac{1}{n}} = z_0 = r_0(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0)$$

$$= r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2 \ldots (n-1)$$

Jadi bentuk akar dari bilangan kompleks bentuk kutub dapat dituliskan

$$\boldsymbol{z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2 \ldots (n-1)}$$

Contoh 1.10

Tentukan akar dari $z^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{\frac{1}{2}}$

Penyelesaian

$z^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{\frac{1}{2}}$

$$x = \sqrt{3}, y = 1$$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$$

x dan y bernilai positif. Berarti θ berada di kuadran 1.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^0$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2 \ldots (n-1)$$

$$z^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{30^0 + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{30^0 + 2k\pi}{2}\right), k = 0,1$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos 15^0 + k\pi + i\sin 15^0 + k\pi), k = 0,1$$

Untuk k = 0

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$$

Untuk k = 1

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos(15^0 + \pi) + i\sin(15^0 + \pi))$$

$$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\cos(195^0) + i\sin(195^0))$$

Bentuk Euler

Misal $z = re^{i\theta}$maka bentuk akar dari z dapat ditulis

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta}{n}}$$

Sehingga secara umum bentuk akar dari bilangan kompleks bentuk euler dapat ditulis sebagai betikut

$$\boldsymbol{z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta+2\pi k}{n}}}$$

Contoh 1.11

Tentukan nilai dari $z^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{\frac{1}{2}}$

Penyelesaian

$z^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{3} + i\right)^{\frac{1}{2}}$

$$x = \sqrt{3}, y = 1$$

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$$

x dan *y* bernilai positif. Berarti θ berada di kuadran 1.

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} = 30^0$$

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta+2\pi k}{n}}$$

$$z^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i30^0+2\pi k}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} e^{i15^0+\pi k}$$

H. RANGKUMAN

1. Bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk $z = x + yi$ dengan $i = \sqrt{-1}$, x disebut bagian rill dan y disebut bagian *imaginer*.
2. Konjugat bilangan kompleks $z = x + yi$ dapat ditulis $\bar{z} = x - yi$
3. Operasi penjumlahan dan pengurangan bilangan kompleks $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ dapat diselesaikan dengan
$$z_1 \pm z_2 = (a \pm bi) + (c \pm di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$$
4. Operasi perkalian bilangan kompleks $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ dapat diselesaikan dengan

$z_1 z_2 = (a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$
$ac + (ad+bc)i - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$

5. Operasi pembagian bilangan kompleks $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ dapat diselesaikan dengan
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} . \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(cb-ad)i}{(c^2+d^2)} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} +$
$\frac{(cb-ad)}{c^2+d^2} i$
6. Bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam 3 bentuk yaitu bentuk titik/vektor $z = x + yi$, bentuk polar/kutub $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ dan bentuk euler $z = re^{i\theta}$.
7. Operasi perpangkatan bilangan kompleks bentuk titik/vektor dapat diselesaikan dengan menggunakan bantuan segitiga pascal. Operasi perpangkatan bilangan kompleks bentuk polar dapat diselesaikan dengan rumus: $\boldsymbol{z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}$ dan operasi perpangkatan bilangan kompleks bentuk euler dapat diselesaikan dengan rumus: $\boldsymbol{z^n = r^n e^{ni\theta}}$
8. Bentuk akar bilangan kompleks bentuk polar dapat diselesaikan dengan rumus:
$$\boldsymbol{z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2 \ldots (n-1)}$$
9. Bentuk akar bilangan kompleks bentuk euler dapat diselesaikan dengan rumus:
$$\boldsymbol{z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta + 2\pi k}{n}}}$$

I. LATIHAN

1. Misalkan $z = -5 - 8i$, tentukan

a. $-z$ b. $\bar{z}$

2. Misal $z_1 = 7 - 2i$ dan $z_2 = 2 - 7i$, tentukan

   a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_2 - z_1$ d. $z_1 z_2$

   e. $\frac{z_1}{z_2}$

   f. $\frac{z_2}{z_1}$

3. Misal $z_1 = 5 + 5i$ dan $z_2 = -5 + 2i$, tentukan

a. $z_1 + \overline{z_2}$ b. $\overline{z_1} - \overline{z_2}$ c. $\overline{z_2 - z_1}$ d. $\overline{z_1} z_2$ e. $\frac{\overline{z_1}}{z_2}$ f. $\frac{\overline{z_2}}{z_1}$

g. $\overline{\overline{z_1} + z_2}$ h. $\overline{\overline{z_1} - \overline{z_2}}$ i. $\overline{z_2}\,\overline{z_1}$ j. $\overline{z_1 z_2} - \overline{z_2}\,\overline{z_1}$

4. Buktikan

   a. $Re(iz) = -Im(z)$ b. $Im(iz) = Re(z)$

5. Misal $z = a + bi$, tunjukkan bahwa $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$!

6. Sederhanakan bilangan kompleks berikut ke dalam bentuk $z = x + yi$.

   a. $z = \frac{3-2i}{4+2i}$ b. $z = \frac{i}{1+i} - \frac{1-i}{i}$ c. $z = \frac{3+i}{5-2i} : \frac{3i}{2-i}$ d. $z = (2 + 3i)^3$

7. Tentukan modulo dan argument dari bilangan kompleks berikut!.

   a. $z = -1 + i$ b. $z = -1 - i$ c. $z = \frac{i}{-2-2i}$

8. Nyatakan bilangan kompleks berikut ini ke dalam bentuk polar dan euler!.

   a. $z = -1 + i$

b. $z = -1 - i$

c. $z = i$

d. $z = -2i$

e. $z = 2$

f. $z = 3\sqrt{3} - 3i$

9. Gunakan bentuk polar/kutub untuk menunjukkan:

   a. $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$

   b. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{10} = 2^{-11}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$

10. Tentukan akar dari bilangan kompleks berikut!

    a. $\sqrt[3]{i}$ b. $2i^{\frac{1}{2}}$ c. $-i^{\frac{1}{3}}$ d. $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$

BAB III
FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS (MAPPING, LIMIT FUNGSI, TURUNAN FUNGSI, FUNGSI ANALITIK DAN FUNGSI HARMONIK)

A. FUNGSI VARIABEL KOMPLEKS

Konsep fungsi yang sudah dipelajari di mata kuliah kalkulus dan analisis real memiliki definisi yang sama dengan fungsi variable kompleks. Perbedaannya hanya terletak pada semesta pembicaraan baik pada domain, kodomain maupun rangenya. Fungsi pada analisis real didefinisikan sebagai pasangan berurutan dua bilangan yang unik yakni pasangan pertama hanya boleh memiliki satu pasangan. Fungsi pada bilangan rill disimbolkan dengan $f: A \rightarrow B$ yang berarti fungsi dari yang memetakkan himpunan A ke himpunan B. himpunan A disebut domain (daerah asal) dan B disebut kodomain (daerah kawan). Daerah asal dan daerah kawan pada fungsi bilangan real berupa titik dan grafik fungsi pada bilangan real berupa garis (Agarwal et al., 2018; Bartle, R. & Sherbert, D., 2000; Stromberg, 2015).

Daerah asal dan daerah kawan suatu fungsi variable kompleks terdiri dari bilangan kompleks. Seperti telah dipelajari sebelumnya bahwa bilangan kompleks sendiri direpresentasikan sebagai sebuah vektor yang ditulislan dalam bidang-XY dengan *X* adalah bagian real dan *Y* adalah bagian *imaginer*. Berikut akan dijabarkan definisi dari fungsi variable kompleks.

Definisi 2.1

Misalkan S adalah himpunan bilangan kompleks. Fungsi variable kompleks pada S adalah pemetaan dari bilangan kompleks z ke bilangan kompleks w. bilangan kompleks w disebut sebagai daerah hasil dari fungsi f pada z dan ditulis $f(z)$ dalam hal ini $w = f(z)$.

Secara umum fungsi variable kompleks dengan domain $z = x + yi$ dan daerah kawan dan hasil $w = u + vi$ dapat ditulis:

$$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

Untuk bentuk polar dan bentuk euler fungsi variable kompleks dapat ditulis

$$f(z) = u(r, \theta) + v(r, \theta)i$$

(Dedy & Sumiaty, 2001; Gunawan, 1987; Pathak et al., 2016)

Contoh 2.1

Misal $z = x + yi$ dan $w = u + vi$.

a. Fungsi $w = f(z) = z$ dapat ditulis $u + vi = f(x + yi) = x + yi$

Dalam hal ini $u(x, y) = x$ dan $v(x, y) = y$

Bentuk euler dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = re^{i\theta}$$

Bentuk polar dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

b. Fungsi $w = f(z) = z^2$ dapat ditulis $u + vi = f(x + yi) = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$

Dalam hal ini $u(x, y) = x^2 - y^2$ dan $v(x, y) = 2xyi$

Bentuk euler dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2e^{2i\theta}$$

Bentuk polar dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big) = \big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big)^2$$
$$= r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$

c. Fungsi $w = f(z) = \frac{1}{z}$ dapat ditulis $u + vi = f(x + yi) = \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$

Dalam hal ini $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ dan $v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Bentuk euler dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$$

Bentuk polar dari fungsi $f(z)$ adalah

$f(z) = f\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big) = \frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$

d. Fungsi $w = f(z) = |z|$ dapat ditulis $u + vi = f(x + yi) = |x + yi| = x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 0.i.$

Dalam hal ini $u(x,y) = x^2 + y^2$ dan $v(x,y) = 0$

Bentuk euler dari fungsi $f(z)$ adalah

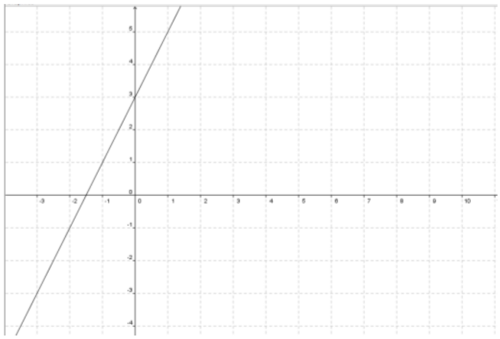
$$f(z) = f\left(re^{i\theta}\right) = r^2$$

Bentuk polar dari fungsi $f(z)$ adalah

$$f(z) = f\big(r(\cos\theta + i\sin\theta)\big) = r^2$$

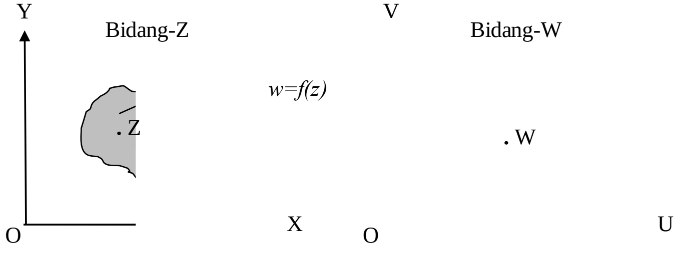
B. PEMETAAN (MAPPING)

Pada fungsi bilangan real, grafik fungsi $y = f(x)$ digambarkan sebagai garis atau lengkungan yang berada pada bidang datar. Sebagai contoh misalnya fungsi $y = f(x) = 2x + 3$ dapat digambarkan dalam grafik fungsi berikut.



Gambar 6. Grafik Fungsi $f(x) = 2x + 3$

Sedikit berbeda dengan grafik fungsi rill, grafik fungsi variable kompleks berupa permukaan pada ruang. Penyajian geometri fungsi kompleks $w = f(z)$ berada pada dimensi 4. Karena itu untuk menggambarkan fungsi kompleks diperlukan dua bidang; bidang yang pertama untuk variabel *z* yang dinamakan bidang-Z dan untuk variable *w* yang dinamakan bidang-W tempat menyajikan nilai fungsi *f*. untuk bidang-Z dapat dinyatakan *x* + *iy* dan untuk bidang-W dapat dinyatakan *u* + *iv*. Pada bidang-Z ditetapkan sumbu real *OX* dan sumbu *imaginer OY* sedangkan pada bidang-W tetapkan sumbu real *OU* dan sumbu *imaginer OV*. Kasus ini dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 7. Pemetaan Bidang-Z ke Bidang-W

Contoh 2.2

Misal $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$ dan $z_3 = 3 + 3i$, jika $f(z) = z^2 - 3$, tentukan $f(z_1), f(z_2)\ dan\ f(z_3)$ dan tentukan mapping dari z_1, z_2 dan z_3.

Solusi

$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 3 - 2i, z_3 = 3 + 3i$ dan $f(z) = z^2 - 3$

$f(z_1) = f(2 + 3i) = (2 + 3i)^2 - 3 = 4 - 9 + 12i - 3 = -8 + 12i$

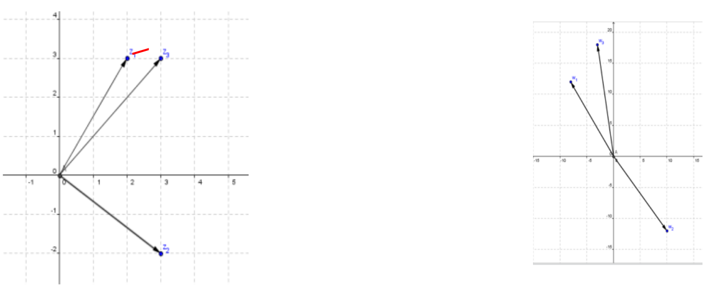
$f(z_2) = f(3 - 2i) = (3 - 2i)^2 - 3 = 9 + 4 - 12i - 3 = 10 - 12i$

$f(z_3) = f(3 + 3i) = (3 + 3i)^2 - 3 = 9 - 9 + 18i - 3 = -3 + 18i$

Pasangan berurutan dari fungsi di atas adalah

$f(z) = \{(2 + 3i, -8 + 12i), (3 - 2i, 10 - 12i), (3 + 3i, -3 + 18i)\}$

Pemetaan dari fungsi di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 8. Pemetaan dari Bidang-Z ke Bidang-W

Misalnya untuk fungsi $f(z) = z^2$ dapat ditulis $f(z) = x^2 - y^2 + 2xy$ dengan $u = x^2 - y^2$ dan $v = 2xy$.

C. LIMIT FUNGSI

Pada mata kuliah analisis real telah didiskusikan tentang limit fungsi rill. Pada fungsi bilangan rill, jika x mendekati suatu titik c maka $y = f(x)$ mendekati suatu titik L. pernyataan ini dikatakan fungsi $f(x)$ memiliki nilai limit L atau ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$. Limit fungsi variable kompleks memiliki pengertian yang sama dengan limit fungsi rill. Limit fungsi variable kompleks $w = f(z)$ dengan z menuju z_0 atau dapat ditulis $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ memiliki pengertian jika z menuju z_0 maka $w = f(z)$ menuju w_0. Definisi formal dari limit fungsi variable kompleks dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 2.2

Diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada daerah $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D$.

$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z - z_0| < \delta$ maka $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.

Untuk nilai $\varepsilon > 0$ yang diberikan maka nilai δ dalam definisi di atas tergantung kepada nilai ε itu. Biasanya makin kecil ε diberikan, makin kecil juga δ. Ini memperlihatkan bahwa nilai $f(z)$ akan makin dekat kepada nilai w_0, apabila variabel z makin dekat kepada z_o. Tetapi variabel z benar mendekati z_o namun tidak pernah sama dengan z_o. Persyaratan untuk titik z_o harus titik limit D, ini diperlukan agar vaiabel z $\in$ D dapat mendekati sedekatdekatnya ke z_o. Titik z_o ini dapat dipilih titik interior atau titik perbatasan D. Perlu diingat titik perbatasan D tidak perlu anggota D.

Contoh 2.3

Buktikan $\lim_{z\to 1} z = 1$!

Solusi

Sebelum membuktikan dengan formal terlebih dahulu dilakukan analisis pendahuluan untuk mencari nilai $\varepsilon\ dan\ \delta$ yang diambil. Dari definisi $\lim_{z\to 1} z = 1$ berarti untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z-1| < \delta$ maka $|z-1| < \varepsilon$. Dari definisi tersebut dapat dipilih $\varepsilon = \delta$.

Bukti formal

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dalam hal ini $\varepsilon = \delta$. maka jika $0 < |z-1| < \delta$ maka akan berlaku $|z-1| < \varepsilon$. Hal tersebut dapat dilakukan dengan mengganti $\varepsilon = \delta$.

Teorema Limit fungsi

Teorema limit fungsi variable kompleks memiliki kesamaan dengan teorema limit fungsi rill.

Teorema 2.1

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ z = x + yi$ dan $z_0 = x_0 + y_0 i$ dan $w_0 = u_0 + v_0 i$ maka $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ dan $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

Teorema 2.2

Diberikan fungsi komplek f terdefinisi pada daerah $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{C}$ dengan $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{D}$ dan $\mathrm{L}, \mathrm{M} \in \mathrm{C}$. Jika $\lim\limits_{\mathrm{z} \to \mathrm{z}_0} \mathrm{f}(\mathrm{z}) = \mathrm{L}$ dan $\lim\limits_{\mathrm{z} \to \mathrm{z}_0} \mathrm{f}(\mathrm{z}) = \mathrm{M}$, maka $\mathrm{L} = \mathrm{M}$

Teorema 2.3

Diberikan fungsi kompleks f dan g yang terdefinisi pada daerah $\mathrm{D} = \mathrm{D}_\mathrm{f} \cap \mathrm{D}_\mathrm{g} \subseteq \mathrm{C}$ dengan $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{D}$.

Jika $\lim\limits_{\mathrm{z} \to \mathrm{z}_0} \mathrm{f}(\mathrm{z}) = \mathrm{L}$ dan $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$, maka

(a) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z) + g(z)] = L + M$

(b) $\lim\limits_{z \to z_0} kf(z) = kL, k \in C$

(c) $\lim\limits_{z \to z_0} [f(z).g(z)] = LM$

(d) $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}, M \neq 0$

D. TURUNAN

Turunan pada fungsi variable kompleks memiliki konsep turunan yang tidak jauh beda dengan konsep turunan pada fungsi rill. Definisi dari turunan fungsi variable kompleks dapat dijabarkan sebagai berikut.

Definisi 2.3

Diberikan fungsi f terdefinisi pada region $\mathrm{D} \subseteq \mathrm{C}$ dan $\mathrm{z}_0 \in \mathrm{D}$. Turunan fungsi f di z_0 didefinisikan dengan

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Jika limit ada.

Pada definisi diatas , misalkan z – z_0 = Δz. Diperoleh z = z_0 + Δz dan $z \to z_0$ jika dan hanya jika $\Delta z \to 0$, di turunan fungsi f di z_0 dapat ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

(Dedy & Sumiaty, 2001; Martono, 1964)

Contoh 2.4

Tentukan turunan dari $f(z) = z^2$!

Solusi

$f(z) = z^2$

Dengan menggunakan definsi dari turunan, maka fungsi di atas dapat ditentukan sebagai berikut.

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{z^2-{z_0}^2}{z-z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{(z+z_0)(z-z_0)}{z-z_0}$$

$$= \lim_{z \to z_0} z + z_0$$

$$= z + z = 2z$$

Jadi turunan dari fungsi $f(z) = z^2$ adalah $f'(z) = 2z$

Contoh 2.5

Tentukan turunan dari $f(z) = \bar{z}$!

Solusi

$f(z) = \bar{z}$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{(z_0 + \Delta z)} - (\overline{z_0})}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(\overline{z_0} + \overline{\Delta z}) - (\overline{z_0})}{\Delta z}$$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$$

Untuk menentukan nilai dari $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ misalkan $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$. Ketika Δz berada pada sumbu horizontal maka Δz akan melalui $(\Delta x, 0)$ atau dapat ditulis $\Delta z = x + 0i$ sehingga:

$$\overline{\Delta z} = \overline{\Delta x + 0.\imath} = \Delta x - 0i = \Delta x + 0.\,i = \Delta z$$

Berarti

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1$$

Tetapi ketika Δz berada pada sumbu vertical maka Δz akan melalui $(0, \Delta y)$ atau dapat ditulis $\Delta z = 0 + yi$ sehingga

$$\overline{\Delta z} = \overline{0 + \Delta y} = 0 - \Delta yi = -(0 + \Delta y) = -\Delta z$$

Berarti

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{-\Delta z}{\Delta z} = -1$$

Karena nilai dari $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ menghasilkan dua nilai maka turunan $f(z) = \bar{z}$ tidak ada.

Rumus Turunan

Definisi turunan pada fungsi variable kompleks memiliki kesamaan dengan definisi turunan pada fungsi rill. Kenyataan ini berakibat pada kesamaan formula atau rumus untuk mencari turunan pada fungsi bilangan rill dan fungsi variable kompleks.

Notasi yang digunakan pada turunan fungsi variable kompleks juga sama dengan turunan pada fungsi rill yakni:

$$\frac{d}{dz}f(z) \text{ atau } f'(z)$$

Berikut beberapa rumus turnan fungsi variable kompleks yang disesuaikan dengan fungsi rill.

a. Fungsi konstan $f(z) = C$ dengan C adalah bilangan rill memiliki turunan $\frac{d}{dz}C = 0$

b. Fungsi linier $f(z) = Az + C$ dengan A dan C adalah bilangan rill memiliki turunan $\frac{d}{dz}(Az + C) = z$

c. Fungsi polinom $f(z) = z^n$ dengan n adalah bilangan bulat memiliki turunan $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$

d. Penjumlahan dua fungsi memiliki turunan

$$\frac{d}{dz}(f(z) + g(z)) = f'(z) + g'(z)$$

e. Perkalian dua fungsi memiliki turunan

$$\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

f. Pembagian dua fungsi memiliki turunan

$$\frac{d}{dz}\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{\left(g(z)\right)^2}, g(z) \neq 0$$

g. Fungsi komposisi memiliki turunan

$$F(x) = f[g(x)]$$

$$F'(x) = f'[g(x)]g'(x)$$

Contoh 2.6

Tentukan turunan fungsi berikut

a. $f(z) = (2z^4 + i)^5$

b. $f(z) = \frac{z^3+i}{z-i}$

Solusi

a. $f(z) = (2z^4 + i)^5$

$f'(z) = 5(2z^4 + i)^4 \times 4 \times 2z^3$

$f'(z) = 40(2z^4 + i)^4 2z^3$

b. $f(z) = \frac{z^3+i}{z-i}$

$$f'(z) = \frac{3z^2 \times (z - i) - (z^2 + i) \times 1}{(z - i)^2}$$

$$f'(z) = \frac{3z^3 - 3z^2 i - z^2 - i}{z^2 - 2iz - 1}$$

$$f'(z) = \frac{(3z - 1)z^2 - (3z^2 + 1)i}{z^2 - 2iz - 1}$$

E. PERSAMAAN CAUCHY REIMAN (PCR)

Pada materi sebelumnya telah dipelajari tentang turunan dari fungsi variable kompleks. Selain itu formula untuk menentukan turunan dari beberapa fungsi juga sudah dijelaskan pada materi sebelumnya. pada kasus fungsi Rill, bahwa tidak semua fungsi rill memiliki turunan, terdapat beberapa fungsi memiliki turunan pada titik tertentu misalnya fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak memiliki turunan pada titik $x = 0$. Hal yang sama juga berlaku pada fungsi variable kompleks. Terdapat beberapa fungsi variable kompleks yang tidak memiliki turunan pada titik tertentu.

Untuk mengetahui suatu fungsi memiliki turunan pada titik tertentu atau tidak, diperlukan syarat cukup. Cauchy dan Raimen berhasil menemukan cara untuk menentukan syarat cukup suatu fungsi apakah memiliki turunan atau tidak.

Teorema 2.4 (Teorema Cauchy Riemann)

Misal $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $z_0 = x_0 + iy_0$. Jika $f'(z)$ ada pada titik z_0 maka $f(z)$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x$$

$f'(z)$ dapat ditulis

$$f'(z_0) = u_x + iv_x \text{ atau } f'(z_0) = u_y + iv_y$$

(Soemanto, 1994)

Bukti

Jelas $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$

Karena *f'(z₀)* ada, maka sepanjang Δy = 0 diperoleh:

$$f'(z_0) \quad = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)+iv(x_0+\Delta x. y_0+\Delta y)]+[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)]}{\Delta x+i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)]+i[v(x_0+\Delta x. y_0)-v(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x_0+\Delta x, y_0)-u(x_0,y_0)]}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[v(x_0+\Delta x. y_0)-v(x_0,y_0)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Dengan memilih kurva $\Delta x = 0$, dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Contoh 2.7

Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = z^2$differensiabel disemua titik.

Solusi

Misal $z = x + yi$

$f(z) = z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$

Untuk menunjukkan $f(z)$ differensiabel disemua titik maka $f(z)$ harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

$u(x, y) = x^2 - y^2$ $\quad u_x = 2x \quad u_y = -2y$

$v(x, y) = 2xy$ $\quad v_x = 2y \quad v_y = 2x$

Karena $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ maka $f(z)$ memenuhi PCR sehingga differensiabel disemua titik.

Contoh 2.8

Tentukan apakah fungsi $f(z) = \bar{z}^2$ diferensiabel disemua titik atau tidak!

Solusi

Misal $z = x + yi$

$f(z) = \bar{z}^2 = (x - yi)^2 = x^2 + y^2 - 2xyi$

Untuk menunjukkan apakah $f(z)$ differensiabel disemua titik maka $f(z)$ harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

$u(x, y) = x^2 + y^2$ $\quad u_x = 2x \quad u_y = 2y$

$v(x, y) = -2xy$ $\quad v_x = -2y \quad v_y = -2x$

Karena $u_x \neq v_y$ dan $u_y = -v_x$ maka $f(z)$ **tidak** memenuhi PCR sehingga $f(z)$ **tidak** differensiabel disemua titik.

Pada kasus ini $f(z)$ akan differensiabel hanya dibeberapa titik saja. Misalnya diambil titik $(0, y)$, maka akan terpenuhi $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$. hal ini menyebabkan $f(z)$ differensiabel di titik $(0, y)$.

Contoh 2.9

Tentukan apakah fungsi $f(z) = 3xy + y + i(3y - xy)$ differensiabel disemua titik atau tidak!

Solusi

Misal $z = x + yi$

$f(z) = 3xy + y + i(3y - xy)$

Untuk menunjukkan apakah $f(z)$ differensiabel disemua titik maka $f(z)$ harus memenuhi persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

$u(x, y) = 3xy + y \qquad u_x = 3y \qquad u_y = 3x + 1$

$v(x, y) = 3y - xy \qquad v_x = -y \qquad v_y = 3 - x$

Karena $u_x \neq v_y$ dan $u_y \neq -v_x$ maka $f(z)$ **tidak** memenuhi PCR sehingga $f(z)$ **tidak** differensiabel disemua titik.

Contoh 2.10

Tentukan apakah fungsi $f(z) = |z|^2$ differensiabel disemua titik atau tidak!

Solusi

$f(z) = |z|^2$

$f(z) = x^2 + y^2$

$u(x) = x^2 + y^2, v(x) = 0i$

Untuk menunjukkan apakah $f(z) = |z|^2$ differensiabel atau tidak disemua titik maka $f(z) = |z|^2$ harus memenuhi persamaan Cauchy reimann (PCR).

$u_x = 2x \qquad u_y = 2y$

$v_y = 0 \qquad v_y = 0$

Terlihat bahwa $u_x \neq v_y$ dan $u_y \neq -v_x$ berarti $f(z) = |z|^2$ tidak differensiabel disemua titik. Fungsi $f(z) = |z|^2$ akan diferensiabel pada titik (0,0) karena pada titik (0,0) $u_x = 2.0 = 0 = v_y$ dan $u_y = 2.0 = 0 = -v_x$ yang memenuhi PCR.

Persamaan Cauchy-Riemann Bentuk Polar dan Euler

Teorema Cauchy-Riemann pada fungsi $f(z)$ dengan $z = x + yi$ dapat dijadikan dasar untuk menentukan persamaan Cauchy-Riemann pada fungsi $f(z)$ dalam bentuk polar maupun dalam bentuk euler. Dengan mentransformasikan koordinat cartesius ke koordinat polar, maka akan diperoleh sebagai berikut.

$x = r\cos\theta$ dan $y = rsin\ \theta$

Karena $z = x + iy$ dan $= r\cos\theta$, $y = rsin\ \theta$ diperoleh $z = re^{i\theta}$

Jelas $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$ dan $\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$

Sehingga dapat dituliskan

$u_r = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$, $u_\theta = -u_x r\ \sin\theta + u_y\, r\ \cos\theta$ ……………1

Begitu pula dengan *v*,

$$v_r = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta \ , v_\theta = -v_x r\ \cos\theta + v_y\, r\ \sin\theta$$

Jika suatu turunan parsial diturunkan terhadap x dan y,juga memenuhi persamaan Cauchy-Riemann yaitu

$ux = vy$ dan $uy = -vx$.kemudian dalam koordinat polar persamaannya menjadi

$v_r = -u_y \cos\theta + u_x \sin\theta$, $v_\theta = u_y r \sin\theta +$
$u_x r \cos\theta$…………………2

Jelas dari 1 dan 2 diperoleh

$$\boldsymbol{u_r = \frac{1}{r} v_\theta} \textbf{ dan } \boldsymbol{\frac{1}{r} u_\theta = -v_r}$$

Jadi, suatu fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dinyatakan dalam bentuk polar menjadi

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

Secara umum persamaan Cauchy-Riemann dalam bentuk polar dapat dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema 2.5

Diberikan $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ terdefinisi pada region $D \subseteq C$ dan $z_0 = re^{i\theta} \in D$ dan turunan parsial pertama fungsi u dan v terhadap $r\ dan\ \theta$ ada di setiap lingkungan Jika turunan parsial kontinu di (r, θ) dan memenuhi persamaan polar

$ru_r = v_\theta$ dan $u_\theta = -rv_r$

maka *f'(z0)* ada dan $f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$.

Contoh 2.11

Diketahui fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$, Tunjukkan bahwa f'(z) ada dan kemudian tentukan persamaan fungsi turunan pertamanya!

Solusi

Jelas $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i \sin\theta)$.

Diperoleh $u(r, \theta) = \frac{cos\theta}{r}$ dan $v(r, \theta) = -\frac{sin\theta}{r}$.

Jadi $u_r = -\frac{cos\theta}{r^2}$, $u_\theta = -\frac{sin\theta}{r}$, $v_r = \frac{sin\theta}{r^2}$, dan $v_\theta = -\frac{cos\theta}{r}$.

Diperoleh $u_r = -\frac{cos\theta}{r^2} = \frac{1}{r} v_\theta$ dan $\frac{1}{r} u_\theta = -\frac{sin\theta}{r^2} = -v_r$.

Jadi, turunan parsial dari fungsi f(z) = $\frac{1}{z}$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann, untuk setiap nilai x, y anggota bilangan riil.

Jelas fungsi $u(r,\theta), \mathrm{v}(r,\theta), u_r(r,\theta), \mathrm{v}_\mathrm{r}(r,\theta), u_\theta(r,\theta)$dan $\mathrm{v}_\theta(r,\theta)$ semuanya kontinu.

Karena fungsi f(z) = $\frac{1}{z}$ memenuhi persamaan Cauchy-Riemann di semua titik dan fungsi $u(r,\theta), \mathrm{v}(r,\theta), u_r(r,\theta), \mathrm{v}_\mathrm{r}(r,\theta), u_\theta(r,\theta)$dan $\mathrm{v}_\theta(r,\theta)$ semuanya kontinu, maka terbukti bahwa f'(z) ada di semua titik.

Jadi persamaan fungsi turunan pertamanaya adalah

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= e^{-i\theta}(u_r + iv_r) \\
&= e^{-i\theta}\left(-\frac{cos\theta}{r^2} + i\,\frac{sin\theta}{r^2}\right) \\
&= -e^{-i\theta}\left(\frac{cos\theta}{r^2} - i\,\frac{sin\theta}{r^2}\right) \\
&= -e^{-i\theta}\,\frac{e^{-i\theta}}{r^2} \\
&= -\frac{e^{-2i\theta}}{r^2} \\
&= -\frac{1}{e^{2i\theta}r^2} \\
&= -\frac{1}{(e^{i\theta}r)^2} \\
&= -\frac{1}{z^2}.
\end{aligned}
$$

F. FUNGSI ANALITIK

Definisi 2.4

Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada domain $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D$. Fungsi f dikatakan *analitik* di z_0 jika terdapat $r > 0$ sehingga $f'(z)$ ada untuk semua $z \in N(z_0, r)$. Jika suatu fungsi analitik disemua titik z kecuali di titik z_0, maka titik z_0 tersebut disebut titik singular atau titik terasing (Spiegel, 2005).

Akibatnya:

Fungsi *f* dikatakan *analitik* di z_0 jika dan hanya jika untuk setiap $r > 0$ terdapat $z_1 \in N(z_0, r)$ sehingga $f'(z)$ ada.

Contoh 2.12

1. Fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ terdiferensial di setiap titik kecuali di $z = 0$, jadi *f* analitik pada domain C-{0}. Titik $z = 0$ disebut sebagai titik singular.
2. Fungsi $g(z) = |z|^2$ hanya terdiferensial di satu titik saja yakni di $z = 0$; jadi fungsi g tidak analitik.
3. Fungsi $h(z) = x^3 + iy^3$ terdiferensial hanya di titik-titik pada garis *y* = *x* dan garis *y* = -*x*. Tidak mungkin dicari kitar suatu titik dan *h* terdiferensial pada kitar itu. Jadi di titik manapun *h* tidak analitik.
4. Fungsi suku banyak analitik di seluruh bidang kompleks sebab di sembarang titik $z_0 \in \mathbb{C}$₵ selalu ada kitar dari z_0 sehingga fungsi terdiferensial di setiap titik dalam kitar itu. Fungsi analitik di seluruh bidang kompleks disebut fungsi utuh. Jadi, fungsi suku banyak adalah fungsi utuh.

Titik di dalam daerah definisi fungsi f dimana f analitik disebut *tidak analitik.*

Definisi 2.5

Titik z_0 dikatakan **titik singular** dari fungsi f yang terdefinisi pada D ⊆ C jika dan hanya jika

a) f tidak analitik di z_0 yaitu $\forall\, r > 0\ \exists\, z_1 \in N(z_0, \delta) \cap D \ni f'(z_1)$ tidak ada.

b) $\forall\, r > 0\ \exists\, z_2 \in N(z_0, r) \cap D \ni f$ analitik di z_2.

Contoh 2.13

1. Misal $f(z) = |z|^2$, maka *f'(z)* ada jika dan hanya jika untuk $z = 0$ (*f'(z)* tidak ada untuk setiap $z \neq 0$). Akibatnya *z=0* **bukan titik singular dari *f*** karena sifat (b) tidak dipenuhi walaupun f tidak analitik di $z = 0$.
2. Misalkan $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$. Fungsi f tak kontinu di *z=1*, sebab $\lim_{z\to 1} f(z) = +\infty$. Jadi f tak analitik di $z = 1$. Dengan cara yang sama f juga tak analitik di $z = -1$. Fungsi *f'(z)* ada untuk $z \neq 1$ dan $z \neq -1$, yaitu $f'(z) = \frac{-2z}{(z^2-1)^2}$, untuk $z \neq 1\ dan\ z \neq -1$. Jadi $z = 1$ dan $z = -1$ merupakan **titik singular fungsi *f*.**

Teorema 2.6

Diberikan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ terdefinisi pada region $D \subseteq C$ dan $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$. Jika

1. Terdapat $r > 0$ sehingga fungsi $u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ kontinu pada $N((x_0, y_0), r)$.

2. Persamaan Cauchy Rieman $u_{x=}v_y$ dan $u_{y=}-v_x$ berlaku pada $N((x_{0,}y_0),r)$ maka fungsi *f* analitik di z_0.

Kekontinuan dan keterdiferensialan suatu fungsi di suatu titik adalah sayarat perlu agar fungsi analitik di titik tersebut, tetapi tidak cukup untuk eksistensi keanalitikan suatu fungsi.

Teorema 2.7

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada $z_0 = x_0 + iy_0$, maka

1. $u_{x=}v_y$ dan $u_{y=}-v_x$ pada $N((x_{0,}y_0),r)$ untuk suatu $r > 0$.
2. u dan *v* mempunyai turunan kedua yang kontinu di z_0, sehingga berlaku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 u}{\partial_y \partial_x} \text{ dan } \frac{\partial^2 v}{\partial_x \partial_y} = \frac{\partial^2 v}{\partial_y \partial_x}$$

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ analitik pada z_0 maka *f'* juga analitik pada z_0. Tetapi karena *f''* merupakan turunan dari *f'*, maka *f''* analitik pada z_0. Dengan cara yang sama $f^{(n)}$ merupakan turunan dari $f^{(n-1)}$ maka $f^{(n)}$ analitik di z_0 untuk setiap $n \in N$. Akibatnya $f^{(n)}$ berlaku persamaan Cauchy Rieman.

Teorema 2.8

Jika $f'(z) = 0$ di setiap domain D, maka *f(z)* konstan pada *D*.

Bukti:

Karena $f'(z) = u_x(x,y) + i\, v_x(x,y) = v_y(x,y) - i\, u_y(x,y) = 0$ pada *D*, maka $u_x, u_y,\ v_x,\ dan\ \ v_y$ identik nol pada *D*.

Karena diketahui *D* suatu domain, yakni himpunan terbuka yang terhubung, maka menurut teorema dalam kalkulus *u* dan *v* konstan pada *D*.

Jadi $f(z)$ konstan di seluruh *D*.

Contoh 2.14

Tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x,y) + v(x,y)i$ jika diketahui $u(x,y) = x^2 - y^2 - y$!

Solusi

$u(x,y) = x^2 - y^2 - y \quad u_x = 2x \quad u_y = -2y - 1$

$f(z)$ analitik, berarti $f(z)$ memenuhi PCR

$u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

$2x = v_y$ dan $-2y - 1 = -v_x$ … … … (a)

$v = \int v_y\, dy = \int 2x\, dy = 2xy + C$

Untuk menentukan nilai C, akan dicari turunan v dari persamaan di atas.

$v_x = 2y + C_x$

Dari persamaan (a) diketahui bahwa $-2y - 1 = -v_x$ atau $2y + 1 = v_x$ berarti

$v_x = 2y + C_x$

$2y + 1 = 2y + C_x$

$C_x = 1$

$$C = \int C_x dx = \int 1 dx = x$$

Sehingga

$v = 2xy + C = 2xy + x$

Jadi fungsi analitik yang diperoleh adalah:

$$f(z) = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x)$$

G. FUNGSI HARMONIK

Diberikan fungsi $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ yang analitik pada domain *D*. Jadi dalam *D* berlaku persamaan Cauchy-Riemann

$u_x = u_y$ …………(1)

$u_y = -v_x$ ………..(2)

Turunan dari persamaan Cauchy-riemann tersebut akan menghasilkan persamaan yang disebut dengan persamaan laplace yaitu:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ dan } v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Definisi 2.6

Fungsi harmonic adalah fungsi yang memenuhi persamaan laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ dan } v_{xx} + v_{yy} = 0$$

Teorema 2.9

Jika sebuah fungsi $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ analitik pada suatu domain *D*, maka *u* dan *v* harmonik pada *D*.

Bukti:

Karena *f* analitik maka *f* memenuhi persamaan C-R,

$u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$

Deferensialkan kedua sisi dari persamaan C-R di atas terhadap x, sehingga diperoleh $u_{xx} = v_{yx} \quad dan \quad u_{yx} = -v_{xx}$

Dengan cara yang sama deferensialkan persamaan C-R terhadap y, sehinggga diperoleh $u_{xy} = v_{yy}$ dan $u_{yy} = -v_{xy}$, kemudian substitusikan ke persamaan Laplace. sehingga diperoleh :

$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} + \left(-v_{xy}\right) = v_{xy} + -v_{xy} = 0$

$v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy} = -u_{xy} + u_{xy} = 0$

Karena $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dan $v_{xx} + v_{yy} = 0$ berarti memenuhi persamaan *Laplace*, sehingga *u* dan *v* harmonik pada *D*.

Dua fungsi $h(x, y)$ dan $k(x, y)$ yang harmonik dalam suatu domain tidak menjamin bahwa fungsi kompleks $g(z) = h(x, y) + i\ k(x, y)$ analitik dalam domain itu. Sebagai contoh fungsi $h(x, y) = x$ dan $k(x, y) = -y$ keduanya harmonik pada $\mathbb{C}$, tetapi fungsi $g(z) = \bar{z} = x - iy$ tidak analitik di titik manapun pada $\mathbb{C}$.

Definisi 2.7

Jika diberikan dua fungsi *u dan v* harmonik di sebuah domain D dan turunan pertamanya memenuhi peersamaan C-R pada D, *v* dikatakan *harmonik konjugat u (harmonic sekawan).*

Teorema 2.10

Sebuah fungsi $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ analitik dalam suatu domain *D* jika dan hanya jika *v* adalah *harmonik konjugat* dari *u.*

Bukti:

⇒ Karena *f(z)* analitik, maka menurut teorema 2, *u* dan *v* harmonik.

Karena f analitik, maka f memenuhi persamaan C-R.

Jadi v harmonik konjugat dari u

⇐ Dipunyai : *v* harmonik konjugat dari *u*

Karena *v* harmonik konjugat dari *u*, maka menurut definisi 4 *f* memenuhi persamaan C-R.

Karena *u dan v* harmonik, maka menurut definisi 3 *u* dan *v* kontinu.

Jadi *f* analitik.

Jika diberikan fungsi harmonik *u* pada domain *D*, sering ditanyakan fungsi harmonik konjugatnya dalam *D*. Dengan kata lain ditanyakan fungsi *v* sehingga $f = u + iv$ analitik pada *D*.

Konstruksi fungsi analitik jika bagian real (*u*) diketahui:

1) Periksa apakah *u(x,y)* merupakan fungsi harmonik. Jika *u(x,y)* bukan fungsi harmonik, maka tidak ada fungsi analitik sehingga
2) $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$. Tetapi jika *u(x,y)* fungsi harmonik lanjut ke langkah (2).
3) Hitung $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial u}{\partial y}$
4) Pilih *v* sehingga $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
5) (4) Dari $\frac{\partial v}{\partial y}$ konstruksi $v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}\ dy + C(x)$
6) Dari (4) tentukan

7) $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\int \frac{\partial u}{\partial x}\ dy + C(x)\right] = -\frac{\partial u}{\partial y}$

8) $= \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial u}{\partial x}\ dy + C'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y}$

9) Dari (5) diperoleh $\mathrm{C}'(\mathrm{x})$

10) Kontruksi $C(x)$ sehingga diperoleh $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Contoh 2.15

Buktikan fungsi $u = 4xy^3 - 4x^3y$ harmonik di seluruh bidang-*xy*, dan tentukan fungsi *v* yang harmonik konjugat dengan *u*!

Solusi

Dipunyai : $u = 4xy^3 - 4x^3y$

Syarat *u* harmonik yaitu memenuhi persamaan *Laplace* : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$u_x = 4y^3 - 12x^2y$ $\quad$ $u_y = 12xy^2 - 4x^3$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{xx} = -24xy$ $\quad$ $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{yy} = 24xy$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -24xy + 24xy = 0$$

Karena *u* memenuhi persamaan *Laplace* maka *u* harmonik. (Terbukti)

Jika *v* harmonik konjugat dari *u*, maka *f*=*u*+*iv* analitik pada $\mathbb{C}$.

Jadi di setiap titik *(x,y)* dipenuhi persamaan C-R

$v_y = u_x = 4y^3 - 12x^2y$ dan $v_x = -u_y = 12xy^2 + 4x^3$

Dengan memandang x tetap, dan mengintegralkan u_x terhadap y diperoleh

$v = y^4 - 6x^2y^2 + g(x)$

Kemudian hitung turunan parsial v terhadap x. Sehingga diperoleh:

$$v_x = -12xy^2 + g'(x)$$

Menurut persamaan Chauchy-Riemann

$v_x = u_y$

$\Leftrightarrow -12xy^2 + g'(x) = 12xy^2 + 4x^3$

$\Leftrightarrow g'(x) = 4x^3$

$\Leftrightarrow g(x) = \int 4x^3\, dx = x^4 + c$, dengan c sebarang konstanta real.

Dengan demikian diperoleh $v = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c$.

Fungsi analitik yang terkait dengan fungsi u yang diberikan adalah

$f(z) = 4xy^3 - 4x^3y + i(y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c)$

$= (-i^2)4xy^3 + (i^2)4x^3y + i(y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c)$

$= i(-4ixy^3 + 4ix^3y + y^4 - 6x^2y^2 + x^4 + c)$

$= i(x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4) + ic$

$= i(x + iy)^4 + ic$

$= i(z^4 + c)$

Jadi $f(z) = i(z^4 + c)$.

Jika diteliti ternyata bentuk terakhir ini dapat diperoleh dengan menggantikan x dengan z dan y dengan 0 pada bentuk $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$ untuk fungsi u yang diberikan dan v yang diperoleh dalam perhitungan di atas.

H. RANGKUMAN

1. Fungsi variabel kompleks $f(z)$ pada himpunan S dapat didefinisikan sebagai relasi yang menghubungkan domain $z \in Z$ ke range $w \in W$ atau dapat ditulis $f(z) \coloneqq Z \to W$.
2. Dalam bentuk vektor fungsi $f(z)$ dapat dinyatakan dengan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dengan $x, y \in Z$ dan $u, v \in W$.
3. Dalam bentuk polar, fungsi $f(z)$ dapat ditulis $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.
4. Definisi limit fungsi variabel kompleks dapat dinyatakan sebagai berikut:

   Diberikan suatu fungsi f yang terdefinisi pada daerah $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D$.

   $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z - z_0| < \delta$ maka $|f(z) - w_0| < \varepsilon$.
5. Definisi turunan fungsi variabel kompleks dapat dinyatakan sebagai berikut.

   Diberikan fungsi f terdefinisi pada region D ⊆ C dan $z_0 \in$ D. Turunan fungsi f di z_0 didefinisikan dengan

   $$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

   Jika limit ada.

   Pada definisi diatas , misalkan $z - z_0 = \Delta z$. Diperoleh $z = z_0 + \Delta z$ dan $z \to z_0$ jika dan hanya jika $\Delta z \to 0$, di turunan fungsi f di z_0 dapat ditulis

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

6. Untuk menentukan apakah suatu fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ memiliki turunan di semua titik, di beberapa titik atau tidak memiliki turunan dapat dilakukan dengan menggunakan Persamaan Cauchy-Riemann (PCR) yaitu:

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x$$

7. Untuk menentukan apakah suatu fungsi $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ memiliki turunan di semua titik, di beberapa titik atau tidak memiliki turunan dapat dilakukan dengan menggunakan Persamaan Cauchy-Riemann (PCR) yaitu:

$$ru_r = v_\theta \text{ dan } u_\theta = -rv_r$$

8. definisi Fungsi Analitik: Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada domain $D \subseteq C$ dan $z_0 \in D$. Fungsi f dikatakan *analitik* di z_0 jika terdapat $r > 0$ sehingga $f'(z)$ ada untuk semua $z \in N(z_0, r)$. Jika suatu fungsi analitik disemua titik z kecuali di titik z_0, maka titik z_0 tersebut disebut titik singular atau titik terasing.
9. Fungsi harmonic adalah fungsi variabel kompleks yang memenuhi persamaan laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \text{ dan } v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

I. LATIHAN

1. Nyatakan fungsi berikut ke dalam bentuk $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$!
   a. $f(z) = z^3 - 2z^2 - 3z$
   b. $f(z) = \frac{1}{z^2 - i}$

c. $f(z) = \frac{z}{z+i}$

2. Nyatakan fungsi berikut ke dalam bentuk $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$!.

   a. $f(z) = z + \frac{1}{z}$

   b. $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$

3. Gunakan definisi limit untuk membuktikan $\lim\limits_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$!

4. Tentukan nilai limit fungsi berikut!

   a. $\lim\limits_{z \to 1+i} z^2 - 5z + 10$

   b. $\lim\limits_{z \to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2 - 2z + 4}$

5. Tentukan $\lim\limits_{z \to 2e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16}$!

6. Buktikan bahwa $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ tidak ada!

7. Tentukan nilai dari $f'(z)$ dari fungsi berikut!.

   a. $f(z) = 3z^3 - 2z^2 + 5z$

   b. $f(z) = (1 - 4z^5)^3$

   c. $f(z) = \frac{z-1}{2z+1}$

8. Gunakan definisi turunan untuk menentukan turunan fungsi berikut di titik yang diberikan!

   a. $f(z) = 3z^2 + 4iz - 5 + i,\ z = 2$

   b. $f(z) = \frac{2z - i}{z + 2i},\ z = -i$

   c. $f(z) = 3z^{-2},\ z = 1 + i$

9. Tunjukkan bahwa fungsi berikut tidak memiliki turunan di semua titik!.
   a. $f(z) = \bar{z}$
   b. $f(z) = z - \bar{z}$
   c. $f(z) = e^x e^{-yi}$
   d. $f(z) = 2x + ixy^2$
10. Tentukan fungsi analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ jika diketahui:
   a. $u(x) = 2x(1 - y)$
   b. $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$
   c. $u(x, y) = \sinh x \sin y$
   d. $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

BAB IV

FUNGSI ELEMENTER PADA VARIABEL KOMPLEKS

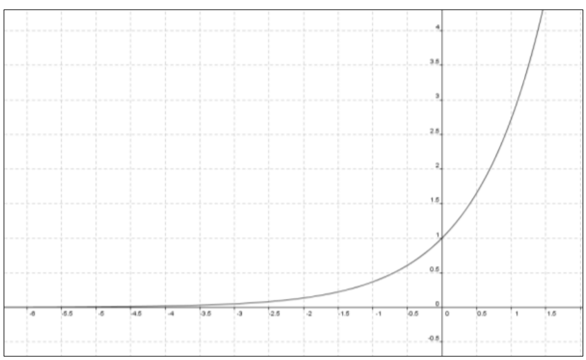
Dalam kalkulus sudah dipelajari tentang beberapa fungsi rill yang secara spesifik dibahas lebih dalam yang sering disebut sebagai fungsi transenden. Fungsi transenden dengan domain dan range bilangan kompleks dalam hal ini disebut sebagai fungsi elementer. Fungsi-fungsi elementer ini selanjutnya merupakan fungsi analitik. Fungsi elementer yang dimaksud diantaranya adalah fungsi eksponensial, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, fungsi hiperbolik dan invers fungsi trigonometri dan hiperbolik.

A. FUNGSI EKSPONENSIAL

Fungsi eksponensial dalam fungsi rill didefinisikan sebagai $f: R \to R$ dengan rumus fungsi:

$f(x) = e^x$ (Hjab, 2016; Morris & Stark, 2016)

Grafik fungsi $f(x) = e^x$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 9. Fungsi Eksponensial

Dalam BAB II telah dipelajari keterkaitan bilangan kompleks dengan bentuk eksponensial. Keterkaitan tersebut menunjukkan bahwa bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam suatu bentuk yang disebut bentuk Euler. Berikut akan dijabarkan keterkaitan bilangan kompleks dengan bentuk eksponensial.

Deret McLaurin dari $e^x, \sin x \; dan \cos x$ dapat ditulis sebagai berikut.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (-\infty < x < \infty)$$

Untuk e^{ix} dapat ditulis

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(i\grave{e})^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{i^2 x^2}{2!} + \frac{i^3 x^3}{3!} + \frac{i^4 \grave{e}^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{\grave{e}^4}{4!} + \cdots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{\grave{e}^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\grave{e}^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$\boldsymbol{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Untuk e^z dapat dijabarkan sebagai berikut

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Dengan demikian secara umum definisi dari fungsi ekponensial e^z dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 3.1

Untuk setiap z bilangan kompleks. Fungsi eksponensial e^zdapat didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{e^z = e^x(\cos y + i \sin y)}$$

(Pathak et al., 2016)

Dari definisi tersebut, dapat digunakan sifat eksponensial yang sudah dipelajari untuk menentukan beberapa bentuk dari fungsi eksponensial.

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

Bentuk ini dapat dijabarkan dengan mengasusmsikan $z = x + yi$

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2+iy_1+iy_2} \\ &= e^{x_1+x_2}e^{(y_1+y_2)i} \end{aligned}$$

2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

Bentuk ini dapat dijabarkan dengan mengasusmsikan $z = x + yi$

$$\begin{aligned} e^{z_1-z_2} &= e^{x_1+iy_1-(x_2+iy_2)} \\ &= e^{x_1-x_2+iy_1-iy_2} \\ &= e^{x_1-x_2}e^{(y_1-y_2)i} \end{aligned}$$

3. $|e^z| = e^x$ dan $\arg(e^z) = y$

Bentuk di atas diambil dari definisi $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$. Definisi tersebut bersesuaian dengan definisi bilangan kompleks dalam bentuk polar $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dengan menganalogikan sisi yang bersesuaian maka dapat ditulis bentuk sebagai berikut.

$$z ------\rightarrow e^z$$

$$|z| = r ----\rightarrow |e^z| = e^x$$

$$\arg(z) = \theta ------\rightarrow \arg(e^z) = y$$

4. Fungsi $f(z) = e^z$ mempunyai fungsi bagian real dan bagian imajiner berturut-turut $u = e^x \cos y \ dan \ v = e^x \sin y$ yang diseluruh bidang kompleks kontinu dan memenuhi persamaan chaucy-rieman. Menurut teorema dalam bab sebelumnya funngsi $f(z)$ terdiferensial di seluruh C, dan $f(z) = u_x(x,y) + v_x(x,y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$.

Dengan demikian $f(z) = e^z$ analitik di seluruh bidang kompleks, jadi suatu fungsi utuh dan $\frac{de^z}{dz} = e^z$

Contoh 3.1

Tentukan nilai dari $f(z) = e^z$ jika $z = i$!

Solusi

$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

$z = i$ berarti $x = 0 \ dan \ y = 1$

$$\begin{aligned} f(i) = e^i \quad &= e^0(\cos 1 + i \sin 1) \\ &= 1(0{,}54 + 0{,}84i) \\ &= 0{,}54 + 0{,}84i \end{aligned}$$

Catatan: nilai cos 1 di atas adalah nilai cosinus untuk radian bukan drajat.

Contoh 3.2

Tentukan nilai $z = x + yi$ dari persamaan $e^z = -1 - i$!

Solusi

$e^z = -1 - i$

$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$x\ dan\ y$ bernnilai negative, berarti θ berada di kuadran 3.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^0$$

$e^z = \sqrt{2}e^{225^0 i}$

$e^{x+yi} = \sqrt{2}e^{225^0 i}$

$e^x e^{yi} = \sqrt{2}e^{225^0 i}$

$$e^x = \sqrt{2}\ dan\ e^{yi} = e^{225^0 i}$$

$x = \ln\sqrt{2} = \ln 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$

$y = 225^0 = \frac{225}{180}\pi = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$

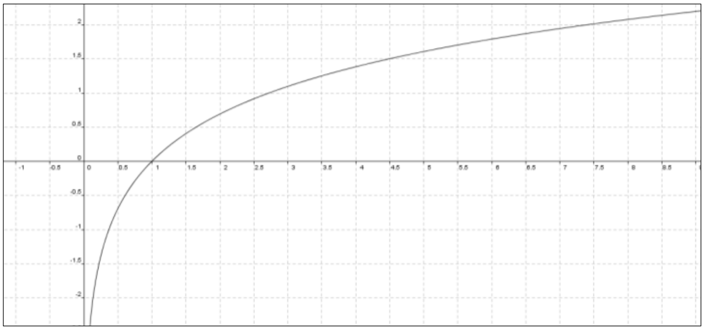
Jadi $z = \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{5}{4} + 2n\right)\pi i$

B. FUNGSI LOGARITMA

Fungsi logaritma asli dalam fungsi rill didefinisikan sebagai fungsi $f: R \to R$ dengan rumus fungsi:

$$f(x) = \ln x$$

Grafik fungsi dari fungsi logaritma asli dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 10. Fungsi Logaritma

Pada mata kuliah kalkulus, untuk fungsi real terdapat dua jenis fungsi logaritma yaitu logaritma umum ditulis $f(x) = \log x$ dan logaritma natural ditulis $f(x) = \ln x$. Dua jenis fungsi logaritma ini memiliki sifat-sifat yang sama dalam kaitannya dengan operasi. Fungsi logaritma pada bilangan rill menjadi dasar untuk menentukan definisi dari fungsi logaritma pada bilangan kompleks, seperti dijabarkan berikut ini.

$$f(z) = \ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta$$

Karena θ bersifat *periodic*, maka dapat ditulis $i\theta = i\theta + 2k\pi$.

Definisi 3.2

Fungsi logaritma asli suatu bilangan kompleks dengan domain $D \subseteq C$ merupakan fungsi periodic yang dapat ditulis

$$\boldsymbol{f(z) = \ln z = \ln r + (i\theta + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots.}$$

Contoh 3.3

Tentukan nilai $f(z) = \ln z$ jika $= -1 - i$!

Solusi

Untuk $z = -1 - i$ maka $r = \sqrt{2}$ dan $\theta = 225^0 = \frac{5}{4}\pi$

$$f(-1-i) = \ln(-1-i) = \ln\sqrt{2} + \left(\frac{5}{4}i + 2k\right)\pi$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\frac{5}{4}i + 2k\right)\pi$$

Contoh 3.4

Tentukan nilai $z = x + yi$ pada fungsi $f(z) = \ln z = 1 + i$!

Solusi

$\ln z = \ln r + (i\theta + 2k\pi)$

$\ln z = 1 + i$

$\ln r = 1$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad r = e$

$i\theta = i$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \theta = 1$

$x = r\cos\theta = e\cos 1 = 2{,}718 \times 0{,}54 = 1{,}47$

$y = r\sin\theta = e\sin 1 = 2{,}718 \times 0{,}84 = 2{,}283$

Jadi $z = 1{,}47 + 2{,}283i$

Sifat-sifat fungsi logaritma

1. $\ln z = \ln r + (i\theta + 2k\pi)$ dapat juga ditulis $\ln z = \ln|z| + (i\arg z + 2k\pi)$
2. $\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}\ (|z| > 0, \pi < \arg z < \pi)$

   Bukti

   $\log z = \ln r + (i\theta + 2k\pi)$

   $\frac{d}{dz}\log z = \frac{d}{dz}[\ln r + (i\theta + 2k\pi)]$

3. $\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

   Bukti

   Misalkan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_1 = r_2 e^{i\theta_2}$

   $\log z_1 z_2 = \log r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}$

$\log z_1 z_2 = \log r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$

$\log z_1 z_2 = \log r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2}$

$\log z_1 z_2 = \log r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

$\log z = \ln r + (i\theta + 2k\pi)$ berarti

$\log z_1 z_2 = \ln r_1 r_2 + i(\theta_1 + \theta_2)$

$\log z_1 z_2 = \ln r_1 + \ln r_2 + i\theta_1 + i\theta_2$

$\log z_1 z_2 = \ln r_1 + i\theta_1 + \ln r_2 + i\theta_2$

$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2$

4. $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$

   Bukti

   Misalkan $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_1 = r_2 e^{i\theta_2}$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \log \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}}$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \log \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}}$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \log \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2}$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \log \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

   $\log z = \ln r + (i\theta + 2k\pi)$ berarti

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2)$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \ln r_1 - \ln r_2 + i\theta_1 - i\theta_2$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \ln r_1 + i\theta_1 - (\ln r_2 + i\theta_2)$

   $\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2$

5. $z^n = e^{n \log z}$

6. $z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log z}$

Eksponen Bilangan Kompleks

Berdasarkan sifat dari pangkat dan logaritma, berlaku persamaan berikut.

$$z^c = e^{c \log z}$$

Dengan $z \neq 0$ dan $\log z$ adalah fungsi logaritma untuk bilangan kompleks. Persamaan di atas dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan bilangan kompleks dengan pangkat bilangan kompleks.

Contoh 3.5

Tentukan solusi dari i^{2i}!

Solusi

Dengan menggunakan persamaan $z^c = e^{c \log z}$ dengan $z = i$ dan $c = 2i$

$$i^{2i} = e^{2i \log i}$$

Dengan menggunakan definisi fungsi logaritma $\log z = \ln r + (\theta + 2\pi k)i$

Untuk $z = i, r = 1$ dan $\theta = 90^0 = \frac{1}{2}\pi$

$$\log i = \ln 1 + \left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi k\right) i = \left(\frac{1}{2} + 2k\right)\pi i$$

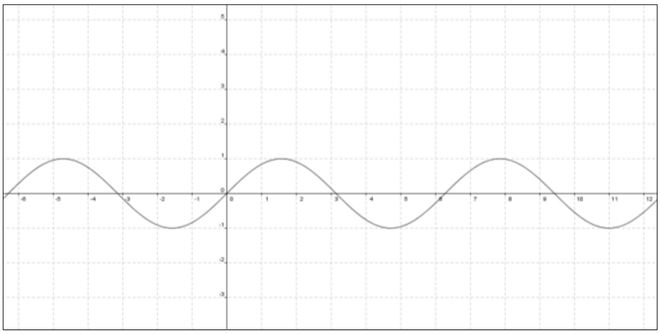
Jadi

$$\begin{aligned} i^{2i} &= e^{2i \log i} \\ &= e^{2i\left[\left(\frac{1}{2}+2k\right)\pi i\right]} \\ &= e^{-(4k+1)\pi} \end{aligned}$$

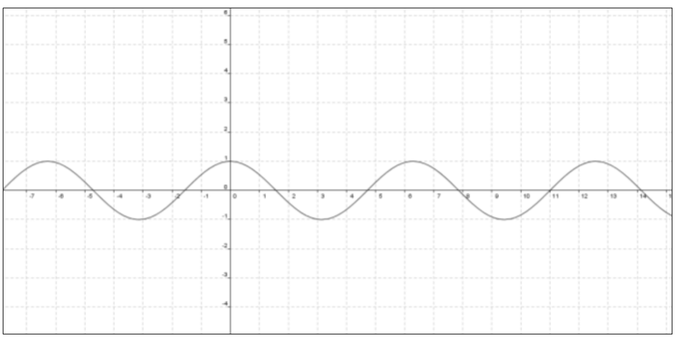
Terlihat bahwa $i^{2i} = e^{-(4k+1)\pi}$ yang hasilnya bilangan rill.

C. FUNGSI TRIGONOMETRI

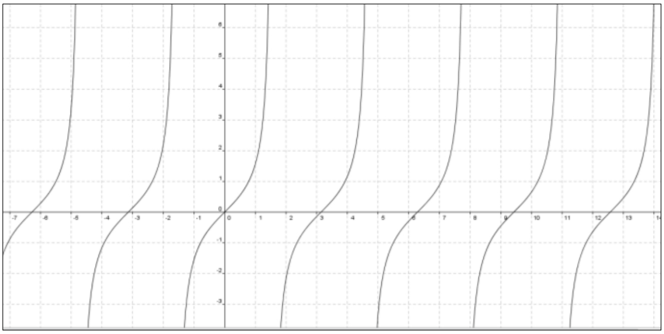
Fungsi trigonometri pada fungsi rill dapat ditulis $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$ dan lain sebagainya. Berikut beberapa contoh grafik fungsi trigonometri.



Gambar 11. Grafik Fungsi $f(x) = sin\, x$



Gambar 12. Grafik Fungsi $f(x) = cos\, x$



Gambar 13.Grafik Fungsi $f(x) = tan\, x$

Beberapa penerapan dari fungsi trigonometri dapat dilihat pada fungsi penjualan, fungsi periodic gelombang suara dan cahaya dan lain sebagainya. Dalam bidang arsitektur konsep trigonometri sendiri digunakan untuk menghitung beban structural, kemiringan atap, dan permukaan tanah.

Fungsi trigonometri ini kemudian akan dibentuk dalam variable kompleks z. Dari bilangan kompleks dalam bentuk kompleks diperoleh dari rumus Euler yaitu:

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ …………………. (1)

Rumus Euler di atas dapat dikembangkan menjadi

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ …………………. (2)

Jika persamaan (1) dan (2) dijumlahkan

$$\begin{array}{rl} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta} & \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} & \\ \hline 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta} & + \end{array}$$

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Jika persamaan (1) dan (2) dikurangi

$$\begin{array}{r}\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}\\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}\\ \hline 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}\end{array} -$$

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Untuk fungsi $f(\theta) = \tan\theta$ dapat dijabarkan

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} : \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \times \frac{2}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{ie^{i\theta}+ie^{-i\theta}}\\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{ie^{i\theta}+ie^{-i\theta}} \times \frac{i}{i}\\ &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{-e^{i\theta}-e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}-e^{i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}\end{aligned}$$

Bentuk di atas dapat direpresentasikan dalam bilangan kompleks z dan ditulis dalam definisi sebagai berikut.

Definisi 3.3

Fungsi trigonometri suatu bilangan kompleks dengan domain $D \subseteq C$ dapat ditulis

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$f(z) = \tan z = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

Contoh 3.6

Tentukan nilai dari fungsi $f(z) = \sin z$, $f(z) = \cos z$ dan $f(z) = \tan z$ untuk $z = i$!

Solusi

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$f(i) = \sin i \quad = \frac{e^{i.i} - e^{-i.i}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-1} - e^{1}}{2i} \times \frac{i}{i}$$

$$= \frac{(e^{-1} - e^{1})}{-2} i$$

$$= \frac{(0{,}367 - 2{,}718)i}{-2}$$

$$= -1{,}175$$

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$f(i) = \cos i \quad = \frac{e^{i.i} + e^{-i.i}}{2}$$

$$= \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}$$

$$= \frac{e^{-1} + e^{1}}{2}$$

$$= \frac{(0{,}367 + 2{,}718)}{2}$$

$$= 1{,}542$$

$$f(z) = \tan z = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

$$f(i) = \tan i \quad = \frac{e^{-i.i} - e^{i.i}}{e^{i.i} + e^{-i.i}}$$

$$= \frac{e^{1} - e^{-1}}{e^{-1} + e^{1}}$$

$$= \frac{2{,}718 - 0{,}367}{0{,}367 + 2{,}718}$$

$$= \frac{2,351}{3,085} = 0,762$$

Contoh 3.7

Tentukan solusi dari $\sin z = i$!

Solusi

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = i$ kedua ruas dikalikan $2i$

$e^{iz} - e^{-iz} = 2i^2$

$e^{iz} - e^{-iz} = -2$

$e^{iz} - e^{-iz} + 2 = 0$

Misal $x = e^{iz}$

$x - x^{-1} + 2 = 0$ kalikan dengan x

$x^2 - 1 + 2x = 0$

$x^2 + 2x - 1 = 0$

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$

$x_{1.2} = -1 \pm \sqrt{2}$

Untuk $x_1 = -1 + \sqrt{2}$

$$e^{iz} = -1 + \sqrt{2}$$

$$\ln e^{iz} = \ln\left(-1 + \sqrt{2}\right)$$

$$iz = \ln\left(-1+\sqrt{2}\right)$$

$$iz = -0{,}881$$

$$z = \frac{-0{,}881}{i}$$

$$z = \frac{-0{,}881}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-0{,}881i}{i^2} = \frac{-0{,}881i}{-1} = 0{,}881i$$

Untuk $x_1 = -1 - \sqrt{2}$

$$e^{iz} = -1 - \sqrt{2}$$

$$\ln e^{iz} = \ln\left(-1-\sqrt{2}\right)$$

$$iz = \ln\left(-1-\sqrt{2}\right)$$

Karena nilai $\ln\left(-1-\sqrt{2}\right)$ tidak ada maka untuk $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ tidak menghasilkan solusi. Sehingga $\sin z = i$ memiliki solusi tunggal yaitu $z = 0{,}881i$.

Contoh 3.8

Tentukan solusi dari $\cos z = 2i$!

Solusi

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 2i$ kedua ruas dikalikan 2

$e^{iz} + e^{-iz} = 4i$

$e^{iz} + e^{-iz} - 4i = 0$

Misal $x = e^{iz}$

$x + x^{-1} - 4i = 0$ kalikan dengan x

$x^2 + 1 - 4ix = 0$

$x^2 - 4ix + 1 = 0$

$$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$x_{1.2} = \frac{-(-4i)\pm\sqrt{(-4i)^2-4.1.(1)}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{4i\pm\sqrt{16i^2-4}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{4i\pm\sqrt{-16-4}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{4i\pm\sqrt{-18}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{4i\pm\sqrt{18}\sqrt{-1}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{4i\pm 3\sqrt{2}i}{2}$

$x_{1.2} = 2i \pm 1{,}5\sqrt{2}i$

Untuk $x_1 = 2i + 1{,}5\sqrt{2}i = \left(2 + 1{,}5\sqrt{2}\right)i \approx 4{,}121i$

$$e^{iz} = 4{,}121i$$

$$\ln e^{iz} = \ln(4{,}121i)$$

$$iz = \ln(4{,}121i)$$

Bilangan kompleks $z_0 = 4{,}121i$ dengan $x = 0\ dan\ y = 4{,}121$ akan diubah ke dalam bentuk euler.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + 4{,}121^2} = 4{,}121$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \sin^{-1}\frac{4{,}121}{4{,}121} = \sin^{-1} 1 = 90^o = \frac{1}{2}\pi$$

Sehingga $z_0 = re^{i\theta} = 4{,}121e^{\frac{1}{2}\pi i}$

Sehingga untuk $iz = \ln(4{,}121i)$ dapat ditulis

$$iz = \ln\left(4{,}121e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

$$iz = \ln(4{,}121) + \ln\left(e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

$$iz = 1{,}416 + \frac{1}{2}\pi i$$

$$z = \frac{1{,}416 + \frac{1}{2}\pi i}{i} = \frac{1{,}416 + \frac{1}{2}\pi i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{1{,}416i + \frac{1}{2}\pi i^2}{i^2}$$

$$z = \frac{1{,}416i + \frac{1}{2}\pi(-1)}{-1} = -1{,}416i + \frac{1}{2}\pi$$

Jadi $z = -1{,}416i + \frac{1}{2}\pi$

Untuk $x_1 = 2i - 1{,}5\sqrt{2}i = \left(2 - 1{,}5\sqrt{2}\right)i \approx -0{,}121i$

$$e^{iz} = -0{,}121i$$

$$\ln e^{iz} = \ln(-0{,}121i)$$

$$iz = \ln(-0{,}121i)$$

Bilangan kompleks $z_0 = -0{,}121i$ dengan $x = 0\ dan\ y = -0{,}121$ akan diubah ke dalam bentuk euler.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{0^2 + (-0{,}121)^2} = 0{,}121$$

$$\theta = \sin^{-1}\frac{y}{r} = \sin^{-1}\frac{-0{,}121}{0{,}121} = \sin^{-1} -1 = 270^o = \frac{3}{2}\pi$$

Sehingga $z_0 = re^{i\theta} = 0{,}121e^{\frac{3}{2}\pi i}$

Sehingga untuk $iz = \ln(-0{,}121i)$ dapat ditulis

$$iz = \ln\left(0{,}121e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)$$

$$iz = \ln(0{,}121) + \ln\left(e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)$$

$$iz = -2{,}111 + \frac{3}{2}\pi i$$

$$z = \frac{-2{,}111 + \frac{3}{2}\pi i}{i} = \frac{-2{,}111 + \frac{3}{2}\pi i}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{-2{,}111i + \frac{3}{2}\pi i^2}{i^2}$$

$$z = \frac{-2{,}111i + \frac{3}{2}\pi i(-1)}{-1} = 2{,}111i + \frac{3}{2}\pi$$

Jadi $z = 2{,}111i + \frac{3}{2}\pi$

Turunan Fungsi Trigonometri

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$f'(z) = \frac{dz}{z}\sin z = \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{iz}}{2i}\right) - \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{ie^{iz}}{2i} - \left(\frac{-ie^{-iz}}{2i}\right) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Terlihat bahwa $\frac{dz}{z}\sin z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$f'(z) = \frac{dz}{z}\cos z = \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right) = \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{iz}}{2}\right) + \frac{dz}{z}\left(\frac{e^{-iz}}{2}\right) = \frac{ie^{iz}}{2} + \left(\frac{-ie^{-iz}}{2}\right) = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i}$

Terlihat bahwa $\frac{dz}{z}\cos z = \frac{-e^{iz}+e^{-iz}}{2i} = -\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin z$

Fungsi Trigonometri Sudut Negatif

Dari definisi fungsi trigonometri di atas, dapat dikembangkan untuk $\sin -z$ dan $\cos -z$

$\sin -z = \frac{e^{-iz}-e^{-i(-z)}}{2i} = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = -\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = -\sin z$

$\cos -z = \frac{e^{-iz}+e^{-i(-z)}}{2} = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos z$

Jumlah sudut trigonomteri

Jumlah sudut fungsi trigonometri variable kompleks memiliki kesamaan dengan jumlah sudut trigonometri pada fungsi rill.

❖ $\mathbf{\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2}$

Bukti

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1 + iz_2} - e^{-iz_1 - iz_2}}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1}e^{iz_2} - e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) =$
$\frac{(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) - (\cos z_1 - i \sin z_1)(\cos z_2 - i \sin z_2)}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) =$
$\frac{(\cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2 + i^2 \sin z_1 \sin z_2)}{2i} -$
$\frac{\cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 - i \sin z_1 \cos z_2 + i^2 \sin z_1 \sin z_2}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) = \frac{(\cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 + i \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2)}{2i} -$
$\frac{\cos z_1 \cos z_2 + i \cos z_1 \sin z_2 - i \sin z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}{2i}$

$\sin(z_1 + z_2) = \frac{2i \cos z_1 \sin z_2 + 2i \sin z_1 \cos z_2}{2i}$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

❖ $\mathbf{\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2}$

$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\cos(z_1 + z_2) = \frac{e^{iz_1 + iz_2} + e^{-iz_1 - iz_2}}{2}$

$$\cos(z_1+z_2)=\frac{e^{iz_1}e^{iz_2}+e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2)=$$
$$\frac{(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)+(\cos z_1-i\sin z_1)(\cos z_2-i\sin z_2)}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2)=$$
$$\frac{\left(\cos z_1\cos z_2+i\cos z_1\sin z_2+i\sin z_1\cos z_2+i^2\sin z_1\sin z_2\right)}{2}+$$
$$\frac{\cos z_1\cos z_2+i\cos z_1\sin z_2-i\sin z_1\cos z_2+i^2\sin z_1\sin z_2}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2)=\frac{(\cos z_1\cos z_2+i\cos z_1\sin z_2+i\sin z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)}{2}+$$
$$\frac{\cos z_1\cos z_2+i\cos z_1\sin z_2-i\sin z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2)=\frac{(2\cos z_1\cos z_2-2\sin z_1\sin z_2)}{2}$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$$

- $\sin 2z = 2\sin z\cos z$

  Bukti

  $\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$

  $\sin(z+z)=\sin z\cos z+\cos z\sin z$

  $\sin 2z = 2\sin z\cos z$

- $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$

  Bukti

  $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$

  $\cos(z+z)=\cos z\cos z-\sin z_1\sin z$

  $\cos 2z=\cos^2 z-\sin^2 z$

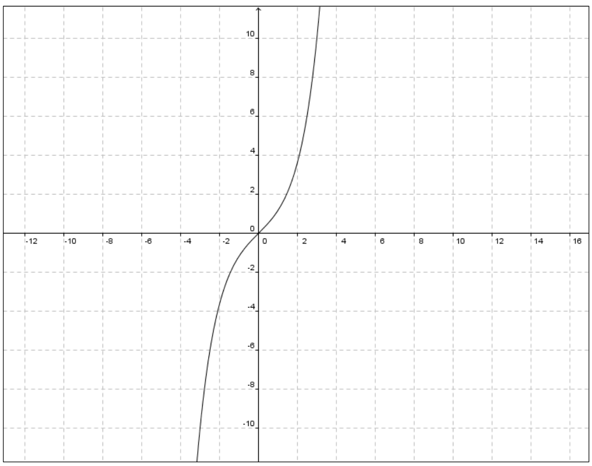
D. FUNGSI HIPERBOLIK

Dalam kalkulus telah dikenal fungsi hiperbolik. Fungsi hiperbolik merupakan kombinasi dari fungsi eksponen dan didefinisikan sebagai berikut.

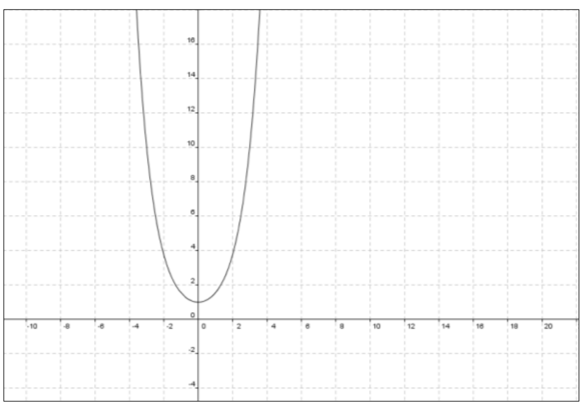
$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Grafik



Gambar 14.Grafik Ffungsi $f(x) = sinh\, x$



Gambar 15.Grafik fungsi $f(x) = cosh\, x$

Fungsi hiperbolik pada bilangan kompleks dapat didefinisikan dengan menggunakan definisi fungsi hiperbolik pada bilangan rill. Berikut definisi fungsi hiperbolik pada bilangan kompleks.

Definisi 3.4

Fungsi hiperbolik $F: Z \to W$ dengan domain Z dan range W didefinisikan sebagai berikut.

$$f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$f(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Contoh 3.9

Tentukan nilai dari $f(i)$ untuk $f(z) = \sinh z$ dan $f(z) = \cosh z$!

Solusi

$f(z) = \sinh z$

$$f(z) = \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\begin{aligned} f(i) = \sinh i \quad &= \frac{e^i - e^{-i}}{2} \\ &= \frac{(\cos 1 + i \sin 1) - (\cos 1 - i \sin 1)}{2} \\ &= \frac{(0{,}54 + 0{,}84i) - (0{,}54 - 0{,}84i)}{2} \\ &= \frac{1{,}68i}{2} \\ &= 0{,}84i \end{aligned}$$

$f(z) = \cosh z$

$$f(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$f(i) = \cosh i \; = \frac{e^{i}+e^{-i}}{2}$$
$$= \frac{(\cos 1 + i \sin 1) + (\cos 1 - i \sin 1)}{2}$$
$$= \frac{(0{,}54 + 0{,}84i) + (0{,}54 - 0{,}84i)}{2}$$
$$= \frac{1{,}08}{2}$$
$$= 0{,}54$$

Jadi $f(i) = \sinh i = 0{,}84i$ dan $f(i) = \cosh i = 0{,}54$.

Contoh 3.10

Tentukan solusi dari $\sinh z = i$ dan $\cosh z = i$!

Solusi

❖ $\sinh z = i$

$$f(z) = \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = i$

$e^{z} - e^{-z} = 2i$

$e^{z} - e^{-z} - 2i = 0$

Misal $e^{z} = x$

$x - x^{-1} - 2i = 0$

$x^{2} - 1 - 2ix = 0$

$x^{2} - 2ix - 1 = 0$

$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$

$x_{1.2} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^{2}-41(-1)}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4+4}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{2i}{2} = i$

Sehingga

$e^z = i$

$\ln e^z = \ln i$

$z = \ln e^{\frac{1}{2}\pi i}$

$z = \frac{1}{2}\pi i$

- ❖ $\cosh z = i$

$$f(z) = \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$\frac{e^z+e^{-z}}{2} = i$

$e^z + e^{-z} = 2i$

$e^z + e^{-z} - 2i = 0$

Misal $e^z = x$

$x + x^{-1} - 2i = 0$

$x^2 + 1 - 2ix = 0$

$x^2 - 2ix + 1 = 0$

$x_{1.2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1.2} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2-4.1.1}}{2.1}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm \sqrt{-4-4}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm \sqrt{-8}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm \sqrt{4.2.-1}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm \sqrt{4}\sqrt{2}\sqrt{-1}}{2}$

$x_{1.2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{2}i}{2}$

$x_{1.2} = i \pm \sqrt{2}i = \left(1 \pm \sqrt{2}\right)i$

$x_1 = \left(1 + \sqrt{2}\right)i = (1 + 1{,}41)i = 2{,}41i$

$x_2 = \left(1 - \sqrt{2}\right)i = (1 - 1{,}41)i = -0{,}41i$

Untuk $x_1 = 2{,}41i$

$e^z = 2{,}41i$

$\ln e^z = \ln 2{,}41i$

$z = \ln 2{,}41e^{\frac{1}{2}\pi i}$

$z = \ln 2{,}41 + \frac{1}{2}\pi i$

$z = 0{,}88 + \frac{1}{2}\pi i$

Untuk $x_1 = -0{,}41i$

$e^z = -0{,}41i$

$\ln e^z = \ln(-0{,}41i)$

$z = \ln\left(0{,}41e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)$

$z = \ln 0{,}41 + \frac{3}{2}\pi i$

$z = -0{,}89 + \frac{3}{2}\pi i$

Jadi untuk $\sinh z = i$, $z = \frac{1}{2}\pi i$ dan untuk $\cosh z = i$, $z_1 = 0{,}88 + \frac{1}{2}\pi i$ dan $z_2 = -0{,}89 + \frac{3}{2}\pi i$.

Sifat-sifat fungsi hiperbolik

1. $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$ dan $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

   Bukti

   $\frac{d}{dz}\sinh z \quad = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)$

$$= \frac{\frac{d}{dz}e^{z} - \frac{d}{dz}e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{e^{z} - (-e^{-z})}{2}$$

$$= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$= \cosh z$$

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{z} + e^{-z}}{2}\right)$$

$$= \frac{\frac{d}{dz}e^{z} + \frac{d}{dz}e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{e^{z} + (-e^{-z})}{2}$$

$$= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$= \sinh z$$

2. $-i\sinh(iz) = \sin z$ dan $\cosh(iz) = \cos z$

Bukti

❖ $\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$

$\sinh iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$

$$-i\sinh iz = -i \times \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$= -i \times \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \times \frac{-i}{-i}$$

$$= i^{2} \times \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2(-i)}$$

$$= -1 \times \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{-2i}$$

$$= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$= \sin z$$

- ❖ $\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

  $\cosh iz = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

  $\cosh z = \cos z$

3. $-i\sin(iz) = \sinh z$ dan $\cos(iz) = \cosh z$

- ❖ $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

  $\sin iz = \frac{e^{i.iz}-e^{-i.iz}}{2i}$

  $\sin iz = \frac{e^{i^2 z}-e^{-i^2 z}}{2i}$

  $\sin iz = \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}$

  $-i\sin iz = -i \times \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i}$

  $-i\sin iz = -\left(\frac{e^{-z}-e^{z}}{2}\right)$

  $-i\sin iz = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$

  $-i\sin iz = \sinh z$

- ❖ $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

  $\cos iz = \frac{e^{i.iz}+e^{-i.iz}}{2}$

  $\cos iz = \frac{e^{i^2 z}+e^{-i^2 z}}{2}$

  $\cos iz = \frac{e^{-z}+e^{z}}{2}$

  $\cos iz = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$

  $\cos iz = \cosh z$

4. $\sinh -z = -\sinh z$ dan $\cosh -z = \cosh z$

   Bukti

- ❖ $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

  $\sinh -z = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2}$

  $\sinh -z = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2}$

  $\sinh -z = -\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)$

  $\sinh z = -\sinh z$

- ❖ $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

  $\cosh -z = \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2}$

  $\cosh -z = \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}$

  $\cosh -z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$

  $\cosh -z = \cosh z$

5. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

   Bukti

   $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

   $\cosh^2 z = \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2$

   $\cosh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^z e^{-z}}{4}$

   $\cosh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^{z-z}}{4}$

   $\cosh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2e^{0}}{4}$

   $\cosh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4}$ ………. (a)

   $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

$$\sinh^2 z = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2$$

$$\sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2e^z e^{-z}}{4}$$

$$\sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2e^{z-z}}{4}$$

$$\sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2e^0}{4}$$

$$\sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} \text{ ……….. (b)}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = \frac{4}{4}$$

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

6. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

Bukti

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1 + z_2} - e^{-(z_1 + z_2)}}{2}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1 + z_2} - e^{-z_1 - z_2}}{2}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1} e^{z_2} - e^{-z_1} e^{-z_2}}{2}$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \left(\frac{e^{z_1} e^{z_2} - e^{-z_1} e^{-z_2}}{4}\right) + \left(\frac{e^{z_1} e^{z_2} - e^{-z_1} e^{-z_2}}{4}\right)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) =$$

$$\left(\frac{e^{z_1} e^{z_2} + e^{z_1} e^{-z_2} - e^{z_1} e^{-z_2} - e^{-z_1} e^{-z_2}}{4}\right) +$$

$$\left(\frac{e^{z_1} e^{z_2} - e^{z_1} e^{-z_2} + e^{z_1} e^{-z_2} - e^{-z_1} e^{-z_2}}{4}\right)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \left(\left[\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\right]\left[\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\right]\left[\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\right]\right)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$$

7. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

   Bukti

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-z_2-z_2}}{2}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2}}{2}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2}}{4}$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \left(\frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} + \frac{e^{-z_1}e^{z_2}+e^{z_1}e^{-z_2}}{4}\right) + \left(\frac{e^{z_1}e^{z_2}+e^{-z_1}e^{-z_2}}{4} - \frac{e^{-z_1}e^{z_2}+e^{z_1}e^{-z_2}}{4}\right)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \left(\left[\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\right]\left[\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\right]\left[\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\right]\right)$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

8. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$

   Bukti

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\sinh(x + yi) = \frac{e^{x+yi}-e^{-x-yi}}{2}$$

$$\sinh(x + yi) = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2}$$

$$\sinh(x+yi) = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y - e^{-x} \cos y + ie^{-x} \sin y}{2}$$

$$\sinh(x+yi) = \frac{e^x \cos y - e^{-x} \cos y + ie^x \sin y + ie^{-x} \sin y}{2}$$

$$\sinh(x+yi) = \frac{(e^x - e^{-x}) \cos y + (e^x + e^{-x}) i \sin y}{2}$$

$$\sinh(x+yi) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x + e^{-x}}{2} i \sin y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

9. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{e^{x+yi} + e^{-x-yi}}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y + e^{-x} \cos y - ie^{-x} \sin y}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{e^x \cos y + e^{-x} \cos y + ie^x \sin y - ie^{-x} \sin y}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{(e^x + e^{-x}) \cos y + (e^x - e^{-x}) i \sin y}{2}$$

$$\cosh(x+yi) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + \frac{e^x - e^{-x}}{2} i \sin y$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

10. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$

Bukti

Dari sifat 8 diketahui bahwa

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

Dengan menggunakan definisi dari modulo pada BAB I maka:

$|\sinh z| = \sqrt{(\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2}$

$$|\sinh z|^2 = \left[\sqrt{(\sinh x \cos y)^2 + (\cosh x \sin y)^2}\right]^2$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x\,(1 - \sin^2 y) + \cosh^2 x \sin^2 y$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x - \sinh^2 x \sin^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y$$
$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + (\cosh^2 x - \sinh^2 x) \sin^2 y$$

Dengan menggunakan sifat 5 yang menyatakan bahwa $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ maka

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

11. $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$

Bukti

Dari sifat no 9 diketahui bahwa

$$\cosh z = \cosh x \sin y + i \sinh x \cos y$$

Dengan definisi modulo diperoleh

$$|\cosh z| = \sqrt{(\cosh x \cos y)^2 + (\sinh x \sin y)^2}$$
$$|\cosh z|^2 = \left[\sqrt{(\cosh x \cos y)^2 + (\sinh x \sin y)^2}\right]^2$$
$$|\cosh z|^2 = (\cosh x \cos y)^2 + (\sinh x \sin y)^2$$
$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y$$
$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x\,(1 - \cos^2 y)$$
$$|\cosh z|^2 = \cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x - \sinh^2 x \cos^2 x$$
$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + (\cosh^2 x - \sinh^2 x) \cos^2 x$$

Dengan menggunakan sifat 5 yang menyatakan bahwa $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ maka

$$|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 x$$

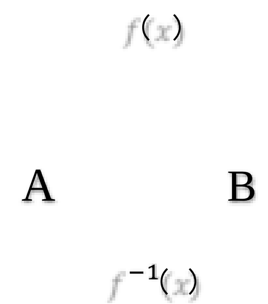
E. INVERS FUNGSI TRIGONOMETRI DAN HIPERBOLIK

Istilah invers fungsi pada bilangan rill digambarkan sebagai pertukaran domain dan range atau dapat ditulis dengan definisi sebagai berikut.

Suatu fungsi $f(x) \coloneqq \{(x,y)|x,y \in R\}$ memiliki invers fungsi yang didefinisikan dengan:

$$\boldsymbol{f^{-1}(x) \coloneqq \{(y,x)|x,y \in R\}}$$

Misalnya fungsi $f(x) = x + 1$ memiliki invers fungsi $f^{-1}(x) = x - 1$. Misalnya untuk domain $A \coloneqq \{0,1,2,3\}$ untuk fungsi $f(x) = x + 1$ memiliki range $B \coloneqq \{1,2,3,4\}$. Adapun invers fungsi $f^{-1}(x) = x - 1$ dengan domain $B \coloneqq \{1,2,3,4\}$ akan menghasilkan range $A \coloneqq \{0,1,2,3\}$. Berikut diagram dari suatu fungsi dan invers fungsi.



Gambar 16.Diagram panah fungsi dan invers fungsi

Untuk fungsi trigonometri, misalnya $f(x) = \sin x$ memiliki invers fungsi $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ yang bermakna bahwa jika $x = \frac{1}{2}\pi$ maka $f\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \sin\frac{1}{2}\pi = 1$ atau dengan pasangan berurutan dapat ditulis $(\frac{1}{2}\pi, 1)$ sedangkan untuk $x =$

1, $f^{-1}(1) = \sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$ atau dapat ditulis dengan pasangan berurutan $\left(1, \frac{1}{2}\pi\right)$.

Invers fungsi trigonometri dan hiperbolik pada bilangan kompleks dapat dinyatakan dalam bentuk logaritma (dapat dilihat pada contoh 3.7, 3.8 dan 3.10).

1. Invers Fungsi Trigonometri

a. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \sin^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \sin z$ dapat ditulus dengan

$$w = \sin^{-1} z \,\ldots\ldots (a)$$

Yang bernilai jika $z = \sin w$ atau dapat ditulis

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$2iz = e^{iw} - e^{-iw}$$

$$e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{iw} diperoleh

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan solusi sebagai berikut.

$$e^{iw} = \frac{-(-2iz) \pm \sqrt{(-2iz)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4i^2z^2 + 4}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2 + 4}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4(1-z^2)}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2iz \pm 2\sqrt{(1-z^2)}}{2}$$

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{(1-z^2)}$$

$$\ln e^{iw} = \ln\left(iz \pm \sqrt{(1-z^2)}\right)$$

$$iw = \ln\left(iz \pm \sqrt{(1-z^2)}\right)$$

Karena nilai $\ln\left(iz - \sqrt{(1-z^2)}\right)$ tidak ada maka

$$iw = \ln\left(iz + \sqrt{(1-z^2)}\right)$$

Sehingga

$$w = \frac{\ln\left(iz \pm \sqrt{(1-z^2)}\right)}{i}$$

$$w = -i \ln\left(iz \pm \sqrt{(1-z^2)}\right)$$

Dari persamaan (a) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\mathbf{\sin^{-1} z = -i \ln\left(iz + \sqrt{(1-z^2)}\right)}$$

b. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \cos^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \cos z$ dapat ditulus dengan

$$w = \cos^{-1} z \ldots\ldots (b)$$

Yang bernilai jika $z = \cos w$ atau dapat ditulis

$$z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$$

$$2z = e^{iw} + e^{-iw}$$

$$e^{iw} + e^{-iw} - 2z = 0$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{iw} diperoleh

$$e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan solusi sebagai berikut.

$$e^{iw} = \frac{-(-2z) \pm \sqrt{(-2z)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$e^{iw} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2z \pm \sqrt{4.-1.(1 - z^2)}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2z \pm 2\sqrt{-1}\sqrt{(1 - z^2)}}{2}$$

$$e^{iw} = \frac{2z \pm 2i\sqrt{-1}\sqrt{(1 - z^2)}}{2}$$

$$e^{iw} = z \pm i\sqrt{(1 - z^2)}$$

$$\ln e^{iw} = \ln\left(z \pm i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

$$iw = \ln\left(z \pm i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

Karena nilai $\ln\left(z - i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$ tidak ada maka

$$iw = \ln\left(z + i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

Sehingga

$$w = \frac{\ln\left(z \pm i\sqrt{(1 - z^2)}\right)}{i}$$

$$w = -i \ln\left(z \pm i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

Dari persamaan (b) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\mathbf{\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + i\sqrt{(1 - z^2)}\right)}$$

c. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \tan^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \tan z$ dapat ditulus dengan

$$w = \tan^{-1} z \ldots\ldots(c)$$

Yang bernilai jika $z = \tan w$ atau dapat ditulis

$$z = -i\,\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

$$\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)z = -ie^{iw} + ie^{-iw}$$

$$e^{iw}z + e^{-iw}z = -ie^{iw} + ie^{-iw}$$

$$(i + z)e^{iw} = (i - z)e^{-iw}$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{-iw} diperoleh

$$(i - z)e^{-2iw} = (i + z)$$

$$e^{-2iw} = \frac{(i + z)}{(i - z)}$$

$$\ln e^{-2iw} = \ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

$$-2iw = \ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

Sehingga

$$w = \frac{1}{-2i}\ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

$$w = \frac{1}{-2i} \times \frac{i}{i}\ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

$$w = \frac{i}{-2i^2}\ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

$$w = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

Dari persamaan (c) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\mathbf{\tan^{-1} z = \frac{i}{2}\ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right)}$$

Contoh 3.11

Tentukan nilai $\sin^{-1} i$!

Solusi

$\sin^{-1} z = -i\ln\left(iz + \sqrt{(1-z^2)}\right)$

$\sin^{-1} i = -i\ln\left(i.i + \sqrt{(1-i^2)}\right)$

$\sin^{-1} i = -i\ln\left(-1 + \sqrt{(1-(-1))}\right)$

$\sin^{-1} i = -i\ln\left(-1 + \sqrt{2}\right)$

$\sin^{-1} i = -i(-0{,}88)$

$\sin^{-1} i = 0{,}88i$

Contoh 3.12

Tentukan nilai $\cos^{-1} 1$!

Solusi

$\cos^{-1} z = -i\ln\left(z + i\sqrt{(1-z^2)}\right)$

$\cos^{-1} i = -i\ln\left(i + i\sqrt{(1-i^2)}\right)$

$\cos^{-1} z = -i\ln\left(i + i\sqrt{(1+1)}\right)$

$\cos^{-1} z = -i\ln\left(i + i\sqrt{2}\right)$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left(\left(1+\sqrt{2}\right)i\right)$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left(\left(1+\sqrt{2}\right)e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

$$\cos^{-1} z = -i \left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \ln e^{\frac{1}{2}\pi i}\right)$$

$$\cos^{-1} z = -i \left(0{,}88 + \frac{1}{2}\pi i\right)$$

$$\cos^{-1} z = -0{,}88i + \frac{1}{2}\pi$$

Turunan invers fungsi trigonometri

- ❖ $\frac{d}{dz}\sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
- ❖ $\frac{d}{dz}\cos^{-1} z = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
- ❖ $\frac{d}{dz}\tan^{-1} z = \frac{1}{1+z^2}$

2. Invers Fungsi Hiperbolik

a. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \sinh^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \sinh z$ dapat ditulus dengan

$$w = \sinh^{-1} z \ldots\ldots (d)$$

Yang bernilai jika $z = \sinh w$ atau dapat ditulis

$$z = \frac{e^w - e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^w - e^{-w}$$

$$e^w - e^{-w} - 2z = 0$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{iw} diperoleh

$$e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan solusi sebagai berikut.

$$e^w = \frac{-(-2z) \pm \sqrt{(-2z)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

$$e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 + 4}}{2}$$

$$e^w = \frac{2z \pm \sqrt{4(1 + z^2)}}{2}$$

$$e^w = \frac{2z \pm 2\sqrt{(1 + z^2)}}{2}$$

$$e^w = z \pm \sqrt{(1 + z^2)}$$

$$\ln e^w = \ln\left(z \pm \sqrt{(1 + z^2)}\right)$$

$$w = \ln\left(z \pm \sqrt{(1 + z^2)}\right)$$

Karena nilai $\ln\left(z - \sqrt{(1 + z^2)}\right)$ tidak ada maka

$$w = \ln\left(z + \sqrt{(1 + z^2)}\right)$$

Dari persamaan (d) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\mathbf{\sinh^{-1} \boldsymbol{z} = \ln\left(\boldsymbol{z} + \sqrt{(1 + \boldsymbol{z}^2)}\right)}$$

b. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \cosh^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \cosh z$ dapat ditulus dengan

$$w = \cosh^{-1} z \ldots\ldots (e)$$

Yang bernilai jika $z = \cosh w$ atau dapat ditulis

$$z = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^w + e^{-w}$$

$$e^{w} + e^{-w} - 2z = 0$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{iw} diperoleh

$$e^{2w} - 2ze^{w} + 1 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan solusi sebagai berikut.

$$e^{w} = \frac{-(-2z) \pm \sqrt{(-2z)^2 - 4.1.1}}{2.1}$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4z^2 - 4}}{2}$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm \sqrt{4(z^2 - 1)}}{2}$$

$$e^{w} = \frac{2z \pm 2\sqrt{(z^2 - 1)}}{2}$$

$$e^{w} = z \pm \sqrt{(z^2 - 1)}$$

$$\ln e^{w} = \ln\left(z \pm \sqrt{(z^2 - 1)}\right)$$

$$w = \ln\left(z \pm \sqrt{(z^2 - 1)}\right)$$

Karena nilai $\ln\left(z - \sqrt{(1 - z^2)}\right)$ tidak ada maka

$$w = \ln\left(z + \sqrt{(z^2 - 1)}\right)$$

Dari persamaan (e) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\mathbf{\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{(z^2 - 1)}\right)}$$

c. Invers fungsi $f^{-1}(z) = \tanh^{-1} z$

Invers fungsi trigonometri $f(z) = \tanh z$ dapat ditulus dengan

$$w = \tanh^{-1} z \ldots\ldots (f)$$

Yang bernilai jika $z = \tanh w$ atau dapat ditulis

$$z = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}}$$

$$ze^w + ze^{-w} = e^w - e^{-w}$$

$$ze^{-w} + e^{-w} = e^w - ze^w$$

$$(z+1)e^{-w} = (1-z)e^w$$

Jika persamaan di atas dikalikan dengan e^{iw} diperoleh

$$(z+1) = (1-z)e^{2w}$$

$$e^{2w} = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\ln e^{2w} = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$2w = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

$$w = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

Dari persamaan (f) maka akan diperoleh definisi dari invers fungsi trigonometri

$$\boldsymbol{\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}$$

F. RANGKUMAN

1. Fungsi eksponen bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

2. Fungsi logaritma bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$f(z) = \ln z = \ln r + (i\theta + 2k\pi); \quad k = 0,1, \ldots.$$

3. Fungsi trigonometri bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan

$$f(z) = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$f(z) = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$f(z) = \tan z = i\,\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

4. Fungsi hiperbolik bilangan kompleks dapat dinyatakan dengan:

$$f(z) = \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$f(z) = \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$f(z) = \tanh z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}$$

5. Invers fungsi trigonometri dapat dinyatakan dengan:

$$\sin^{-1} z = -i \ln\left(iz + \sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

$$\cos^{-1} z = -i \ln\left(z + i\sqrt{(1 - z^2)}\right)$$

$$\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln\left(\frac{i + z}{i - z}\right)$$

6. Invers fungsi hiperbolik dapat dinyatakan dengan:

$$\sinh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{(1 + z^2)}\right)$$

$$\cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{(z^2 - 1)}\right)$$

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + z}{1 - z}\right)$$

G. LATIHAN

1. Tentukan nilai dari fungsi eksponen berikut!
   a. $f(z) = e^{2 \pm \pi i}$
   b. $f(z) = e^{\frac{2+\pi i}{4}}$
   c. $f(z) = e^{-2i}$
2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = e^{z^2}$ adalah fungsi analitik dan tentukan turunan dari fungsi tersebut!
3. Tentukan nilai z dari persamaan berikut!
   a. $e^z = -2$
   b. $e^z = 1 + \sqrt{3}i$
   c. $e^{2z-1} = 1$
4. Tentukan nilai dari fungsi logaritma berikut!
   a. $f(z) = \log -ei$
   b. $f(z) = \log(1 - i)$
   c. $f(z) = \log -2i$
5. Tunjukkan bahwa
   a. $\log(1 + i)^2 = 2\log(1 + i)$
   b. $\log(-1 + i)^2 \neq 2\log(-1 + i)$
6. Tentukan nilai z dari fungsi logaritma berikut!
   a. $\log z = -i$
   b. $\log z = \frac{i\pi}{2}$
   c. $\log z = \frac{3}{2}\pi i$
7. Tentukan nilai dari:
   a. $(1 + i)^i$
   b. $(-i)^{2i}$

c. $(1-i)^{-i}$

8. Tentukan nilai dari fungsi trigonometri berikut!

   a. $\sin(1+i)$

   b. $cos(1-i)$

   c. $\tan(-1-i)$

9. Tentukan solusi dari persamaan berikut!

   a. $\sin z = 1$

   b. $\cos z = 2i$

   c. $\cos z = 2$

   d. $\tan z = -i$

10. Buktikan identitas trigonometri bilangan kompleks berikut!.

    a. $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$

    b. $1 + \cot^2 z = \csc^2 z$

11. Tentukan nilai dari fungsi hiperbolik berikut!

    a. $\sinh(1+i)$
    b. $\cosh(1-i)$
    c. $\tanh(-i)$

12. Tentukan solusi dari persamaan berikut!

    a. $\sinh z = i$
    b. $\cosh z = -2$
    c. $\cosh z = \frac{1}{2}$

13. Tunjukkan bahwa:

    a. $\sinh(z+\pi i) = -\sinh z$

    b. $\cosh(z+\pi i) = -\cosh z$

    c. $\tanh(z+\pi i) = \tanh z$

14. Buktikan identitas berikut!

    a. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

b. $\sinh z + \cosh z = e^z$

15. Tentukan nilai dari invers fungsi trigonometri dan hiperbolik berikut!

a. $\sin^{-1}(-i)$

b. $\tan^{-1}(2i)$

c. $\tan^{-1}(1+i)$

d. $\cosh^{-1}(-1)$

e. $\tanh^{-1}(0)$

16. Tentukan solusi dari persamaan berikut!

a. $\sin^{-1} z = i$

b. $\tan^{-1} z = -i$

c. $\tanh^{-1} z = -i$

BAB V
INTEGRAL KOMPLEKS

A. FUNGSI KOMPLEKS DARI VARIABEL REAL

Pembahasan materi integral sudah dipelajari pada mata kuliah kalkulus dan analisis real. Semesta pembicaraan pada kedua mata kuliah tersebut adalah bilangan rill. Integral didefinisikan sebagai anti turunan. Definisi integral tentu secara sederhana dapat ditulis sebagai berikut:

Misalkan $x, y \in A$ dan $f: A \rightarrow B$ dengan $f'(x) = F$. integral tak tentu fungsi F dapat ditulis:

$$\int F\, dx = f$$

(Hjab, 2016; Morris & Stark, 2016)

Untuk memperkenalkan integral $f(z)$ dengan cara yang sederhana, pertama andaikan turunan dan integral tentu dari fungsi kompleks w dengan variabel real t. Suatu fungsi kompleks dari variabel real tersebut dapat ditulis sebagai berikut.

$$w(t) = u(t) + iv(t)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dimana u dan v merupakan fungsi bernilai real dari variabel t.

Turunan dari $w(t)$ yaitu $w'(t)$ atau $\frac{d[w(t)]}{dt}$ didefinisikan sebagai

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Dari definisi tersebut kita dapat mendefinisikan untuk setiap konstanta bilangan kompleks $z_o = x_o + iy_o$, maka

$$\frac{d}{dt}[z_o w(t)] = \frac{d}{dt}[(x_o + iy_o)(u + iv)]$$

$$= \frac{d}{dt}[(x_o u - y_o v) + i(y_o u + x_o v)]$$

$= \frac{d}{dt}(x_o u - y_o v) + i\frac{d}{dt}(y_o u + x_o v)$

$= (x_o u' - y_o v') + i(y_o u' + x_o v')$

$= (x_o + iy_o)(u' + iv')$

$= z_o w'(t)$

Dengan demkian diperoleh bahwa:

$$\frac{d}{dt}[z_o w(t)] = z_o w'(t) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(3)$$

Dengan cara yang sama seperti di atas diperoleh juga bahwa:

$$\frac{d}{dt}e^{z_o t} = z_o e^{z_o t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(4)$$

Tidak semua aturan turunan pada fungsi real yang ada di kalkulus berlaku pada fungsi kompleks dengan variabel real. Misal $w(t)$ kontinu pada selang $a \leq t \leq b$ (berarti u dan v keduanya kontinu pada selang tersebut). Meskipun $w'(t)$ ada pada selang $a < t < b$, namun Teorema Nilai Rata-rata (TNR) tidak berlaku lagi. Dengan kata lain, tidak selalu benar bahwa ada bilangan c pada selang $a < t < b$ sehingga

$$w'(c) = \frac{w(b) - w(a)}{b - a}$$

Untuk menunjukkannya, kita misalkan $w(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

Jelas bahwa $w'(t) = ie^{it} \neq 0$……..(i)

Artinya nilai $w'(t)$ tersebut tidak pernah sama dengan nol.

Sedangkan jika kita mencari $w'(t)$ dengan TNR kita mendapatkan hasil sama dengan nol untuk $0 \leq t \leq 2\pi$. Hal ini bertentangan dengan persamaan (i).

Definisi 4.1

Integral tentu untuk fungsi variabel kompleks $w(t)$ dengan variabel real t dimana $w(t) = u(t) + iv(t)$, dengan $u\ dan\ t$ adalah bilangan real dan $a \leq t \leq b$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$.................................(5)

Jika masing-masing integral u dan v ada.

Dengan demikian

Re$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b \text{Re}[w(t)]dt$ dan

Im $\int_a^b w(t)dt = \int_a^b \text{Im}\,[w(t)]dt$……….(6) (Brown & Churchill, 2014; Pathak et al., 2016)

Contoh 4.1

Tentukan $\int_0^1 (1 + it)^2 dt$!

Solusi

$$\int_a^b w(t)\, dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$$

$$\int_0^1 (1 + it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2 + 2it)dt$$

$$\int_0^1 (1 + it)^2 dt = \int_0^1 (1 - t^2)dt + i \int_0^1 2tdt = \frac{2}{3} + i$$

Keberadaan integral u dan v pada definisi/persamaan 5 terjamin jika kedua fungsi tersebut kontinu sepotong-sepotong pada selang $\leqq t \leqq b$. Misal sebuah fungsi yang kontinu dimana-mana pada selang tersebut kecuali mungkin di titik limitnya. Meskipun tak kontinu, fungsi ini memiliki limit sepihak. Tentu saja, hanya limit kanan yang dibutuhkan di a dan hanya limit kiri yang dibutuhkan di b. Ketika keduanya yaitu u dan v kontinu sepotong-sepotong, maka fungsi w dikatakan memenuhi persamaan 5. Sifat operasi integral fungsi real di bawah ini berlaku pula pada integral fungsi kompleks bervariabel real.

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt$$

Misalkan fungsi $w(t) = u(t) + iv(t)$ dan $W(t) = U(t) + iV(t)$ kontinu pada selang $a \leqq t \leqq b$. Jika $W'(t) = w(t)$ pada selang $a \leq t \leq b$, maka $U'(t) = u(t)$ dan $V'(t) = v(t)$, oleh sebab itu berdasarkan definisi,

$$\int_a^b w(t)\,dt = U(t)\Big]_a^b + iV(t)\Big]_a^b$$

$$= [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)]$$

Sehingga

$$\int_a^b w(t)\,dt = W(t)\Big]_a^b = W(b) - W(a) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Contoh 4.2

Diketahui $\frac{d(e^{it})}{dt} = ie^{it}$, hitunglah $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\,dt$!

Solusi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\,dt = -ie^{it}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -ie^{i\frac{\pi}{4}} + i = -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + i$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Untuk menentukan sifat dasar dari nilai mutlak suatu integral, kita misalkan $a < b$ dan nilai dari integral yang didefinisikan pada persamaan 5 merupakan bilangan kompleks yang tidak sama dengan nol. Jika r_o merupakan modulus dan θ_o adalah argumen dari konstan tersebut, maka :

$\int_a^b w\, dt = r_0\, e^{i\theta_0} \Leftrightarrow\ r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0}\, w\, dt$ ....(8)

Ruas kiri dan ruas kanan dari persamaan 8 berupa bilangan real. Bagian real dari bilangan real adalah bilangan itu sendiri. Berdasarkan persamaan 6, hal tersebut, maka ruas kanan persamaan 8 dapat ditulis

$$\int_a^b e^{-i\theta_0} w\, dt = \mathrm{Re}\ \int_a^b e^{-i\theta_0} w\, dt = \int_a^b \mathrm{Re}\ \left(e^{-i\theta_0} w\right) dt$$

Jadi persamaan 8 menjadi $r_0 = \int_a^b \mathrm{Re}\ \left(e^{-i\theta_0} w\right) dt$..................(9)

$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta_0} w\right) \leq \left|e^{-i\theta_0} w\right| = \left|e^{-i\theta_0}\right||w| = |w|$

Berdasarkan persamaan 9 , maka $r_0 \leq \int_a^b |w|\, dt.$

Sehingga $\left|\int_a^b w(t) dt\right| \leq \int_a^b |w(t)|\, dt$ untuk $a < b$...............(10)

$\left|\int_a^\infty w(t)\, dt\right| \leq \int_a^\infty\ |w(t)|\ dt$ ....(11)

B. LINTASAN / LENGKUNGAN (*CONTOURS*)

Jika g dan h fungsi bernilai real dan kontinu dari variabel real t dalam selang tertutup $[a, b]$, maka himpunan titik-titik $(g(t), h(t))$ di bidang-XY akan membentuk suatu **kurva**. Jadi himpunan titik $z = x + iy$ di bidang kompleks adalah suatu kurva jika $x = g(t)$ dan $y = h(t)$ dengan g dan h fungsi real kontinu dari variabel t dan $t \in [a, b]$. Titik $g(a) + ih(a)$ dinamakan titik awal, dan titik $g(b) + ih(b)$ dinamakan titik akhir kurva itu.

Jika tidak ada titik pada kurva yang berkawankan dengan dua nilai t yang berlainan dalam $[a, b]$, maka kurva dinamakan **kurva tunggal**. Suatu kurva yang titik awal dan titik akhirnya berimpitan dinamakan **kurva tertutup**. Kurva tertutup yang tidak memotong dirinya sendiri dinamakan **kurva tertutup tunggal.** Kurva yang tidak tertutup disebut **kurva terbuka**.

Perlu diperhatikan bahwa definisi tertutup dan terbuka untuk kurva berbeda dengan himpunan.

Jika suatu kurva $C = \{z = g(t) + ih(t): a \leq t \leq b\}$ dengan g' dan h' ada dan kontinu pada $[a, b]$ dan untuk $t \in [a, b]$ nilai $g'(t)$ dan $h'(t)$ tidak pernah bersama-sama nol, maka C disebut suatu **kurva mulus**. Syarat g' dan h' ini menjamin bahwa gradien garis singgung di $P\ (g(t), h(t))$ pada C berubah kontinu apabila variabel t bergerak dari a ke b dalam selang $[a, b]$, alasan inilah mengapa istilah mulus digunakan.

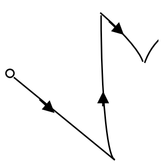
Jika kurva C merupakan rangkaian beberapa kurva mulus $C_{1,} C_{2,} \dots, C_n$ sedemikian hingga titik akhir C_j berimpit dengan titik awal C_{j+1} untuk $j = 1,2,3, \dots, n-1$, maka kurva C dinamakan suatu **lintasan / kontur.**

Lintasan C ini juga ditulis $C_1 + C_2 + \cdots + C_n$. Dalam hal ini titik awal C_1 dan titik akhir C_n. Lintasan yang titik awal dan titik akhirnya berimpit disebut **lintasan tertutup,** jika titik awal dan akhirnya tidak berimpit disebut **lintasan terbuka**. Lintasan tertutup yang tidak memotong dirinya sendiri disebut **lintasan**

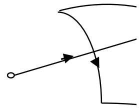
tertutup tunggal, jika memotong dirinya sendiri maka disebut **lintasan tertutup ganda**.

Perbatasan suatu daerah segitiga atau daerah cakram adalah contoh lintasan tertutup tunggal. Kurva tunggal yang mulus adalah suatu lintasan tunggal.

Andaikan C suatu lintasan tunggal dengan persamaan $x = g(t), y = h(t)$ dan $a \leq t \leq b$. Arah positif C ditentukan sebagai arah sepanjang lintasan dari titik awal menuju ke titik akhir. Arah yang sebaliknya disebut arah lawan lintasan itu. Jika C suatu lintasan tertutup tunggal, maka jika kita bergerak ke depan menelusuri C sedemikian hingga daerah interior C / int (C) berada di sebelah kiri kita, maka arah ini kita sebut arah positif dari C , sedangkan arah yang berlawanan disebut arah negatif. Perhatikan contoh berikut:



(a) (b) (c)



(d) (e)

*Gambar 17. Lintasan**: (a)** Lintasan terbuka tunggal; (b) Lintasan tertutup tunggal berarah positif; (c) Lintasan tertutup tunggal berarah negative; (d) Lintasan terbuka ganda; (e) Lintasan tertutup ganda*

Pengertian lintasan ini penting dalam teori integral fungsi bernilai kompleks dari variabel kompleks, yang akan berperan seakan-akan sebagai selang pengintegralan dalam teori integral tentu fungsi real dari satu variabel real.

Teorema 4.1 (Teorema Kurva Jordan)

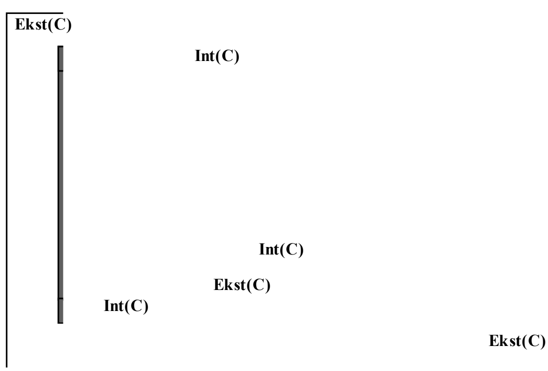
Jika C suatu lintasan tertutup tunggal pada suatu bidang datar, maka bidang datar akan terbagi oleh C menjadi tiga bagian yang saling asing sebagai berikut:

a) Kurva C itu sendiri;

b) $\text{Int}(C)$, yakni interior C, yang merupakan himpunan **terbuka** dan **terbatas**;

c) $\text{Eks}(C)$, yakni eksterior C, yang merupakan himpunan **terbuka** dan **tak terbatas**

Kurva C merupakan perbatasan dari himpunan $\text{Int}(C)$ dan himpunan $\text{Ekst}(C)$.



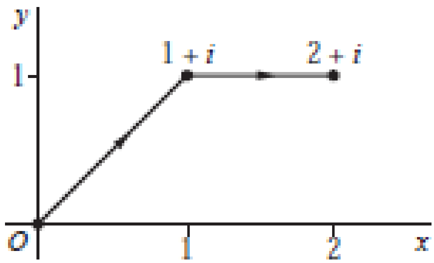
Gambar 18. Interior dan Eksterior Kurva C

Contoh 4.3

Polygon garis yang didefinisikan dengan:

$$z = \begin{cases} x + ix, & jika\ 0 \leq x \leq 1, \\ x + i, & jika\ 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

yang terdiri dari garis 0 sampai $1 + i$ diikuti dari $1 + i$ sampai $2 + i$ adalah lintasan sederhana



Gambar 19. Lintasan polygon Gaaris z

C. INTEGRAL CONTOUR

Pada pembahasan ini akan di definisikan integral tertentu fungsi variabel kompleks f dari peubah kompleks z. Integral ini dapat juga dikatakan sebagai nilai dari $f(z)$ sepanjang lintasan C yang merentang dari $z = \alpha$ sampai $z = \beta$ di bidang kompleks. Integral ini disebut sebagai integral Counter dan dapat ditulis:

$$\int_C f(z)dz \text{ atau } \int_\alpha^\beta f(z)dz$$

Bila counter C dinyatakan dengan persamaan $z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ merentang dari titik $z(a) = \alpha$ ke titik $z(b) = \beta$ dan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ kontinu sepotong-sepotong pada C yang mana fungsi $u[x(t), y(t)]$ dan $v[x(t), y(t)]$ dari $f[z(t)]$ kontinu sepotong-sepotong dari t. Dapat didefinisikan integral counter f sepanjang C sebagai berikut.

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z^1(t)dt \ldots\ldots..(1)$$

Dengan bentuk $f[z(t)]z^1(t) = \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}\{x^1(t) + iy^1(t)\}$ maka persamaan (1) di atas dapat ditulis:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b (ux^1 - vy^1)dt$$
$$+ i\int_a^b (vx^1 + uy^1)dt \dots\dots\dots (2)$$

Bentuk integral counter dari fungsi variabel kompleks dengan dua peubah x dan y dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy) \dots\dots\dots (3)$$

Dengan pengertian yang sama pada persamaan (1), untuk counter – C adalah counter yang sama dengan arah yang berlawanan. Dapat ditulis bahwa counter – C mempunyai persamaan $z = z(-t)$ dengan $-b \leq t \leq -a$, dengan demikian maka:

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)]z^1(-t)dt \dots\dots\dots (1)$$

Atau dapat ditulis:

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

Batas Atas Modulus dari Contur Integral

C di definisikan sebagai sebuah kontur $z = z(t)(a \leq t \leq b)$,

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b [f(z)]z'(t)dt\right| \leq \int_a^b |[f(z)]|\,|z'(t)|dt$$

Untuk konstanta nonnegative M,

$$|f(z)| \leq M \Leftrightarrow \quad \left|\int_c f(z)\,dz\right| \leq M\int_a^b |z'(t)|dt$$

$$\Leftrightarrow \left|\int_c f(z)\,dz\right| \leq ML$$

perhatikan bahwa karena semua lintasan integras adalah kontur dan integral adalah fungsi kontinu yang didefinisikan pada kontur, M yang muncul dalam ketidaksamaan $\left|\int_c f(z)\,dz\right|$ akan selalu ada, hal ini dikarenakan real- dinilai fungsi f (z) kontinu pada interval bounded tertutup (a ≤ t ≤ b) jika f kontinu pada C, dan fungsi tersebut selalu mencapai nilai maximum M pada selang tersebut, maka f (z) memiliki sebuah nilai maximum pada C ketika f kontinu , jadi f adalah kontinu pada C.

Contoh 4.4

Tentukan nilai dari:

$$\int_C y\,dz$$

Dengan C adalah kurva sepanjang $x = t + 1, y = e^t, 0 \leq t \leq 1$

Solusi

Dikethui $C \coloneqq x = t + 1, y = e^t, 0 \leq t \leq 1$

$z = x + iy$

$z = (t + 1) + ie^t$

$\frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}[(t + 1) + ie^t]$

$\frac{dz}{dt} = 1 + ie^t$

$dz = (1 + ie^t)dt$

Sehingga

$\int_C y\,dz = \int_0^1 e^t(1 + ie^t)dt$

$\int_C y\,dz = \int_0^1 (e^t + ie^{2t})dt$

$\int_C \ y\,dz = \int_0^1 e^t dt + i\int_0^1 e^{2t} dt$

$\int_C \ y\,dz = e^t|_0^1 + i\left[\frac{1}{2}e^t\right]_0^1$

$\int_C \ y\,dz = (e^1 - e^0) + i\left(\frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0\right)$

$$\int_C \ y\,dz = (e-1) + \frac{1}{2}i(e-1)$$

Contoh 4.5

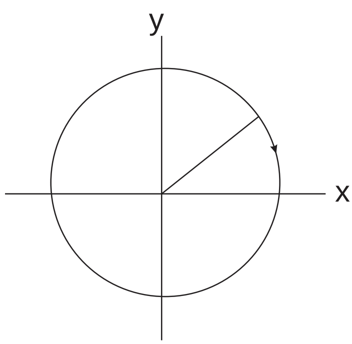
Tentukan nilai dari:

$$\int_C \ z^2\,dz$$

Dengan C adalah lingkaran satuan (searah jarum jam).

Solusi

Diketahui C adalah lingkaran satuan (searah jarum jam)



Gambar 20. Lingkaran Satuan Searah Jarum Jam

Karena C adalah lingkaran searah jarum jam maka C dapat ditulis

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$z = x - yi, \qquad x = \cos t\,, \qquad y = \sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$z = e^{-it} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Dipilih $z = e^{-it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$

$dz = -ie^{-it}dt$

$$\int_C z^2\, dz = \int_0^{2\pi} \left(e^{-it}\right)^2 \left(-ie^{-it}\right)$$

$$\int_C z^2\, dz = -i\int_0^{2\pi} e^{-2it}\, e^{-it}$$

$$\int_C z^2\, dz = -i\int_C^{2\pi} e^{-3it}$$

$$\int_C z^2\, dz = -i\left[-3ie^{-3it}\right]_0^{2\pi}$$

$$\int_C z^2\, dz = -i\left(-3ie^{-3i.2\pi} - (-3ie^0)\right)$$

$$\int_C z^2\, dz = -i\left(-3ie^{-6\pi i} + 3i\right)$$

$$\int_C z^2\, dz = 3i^2e^{-6\pi i} - 3i^2$$

$$\int_C z^2\, dz = -3e^{-6\pi i} + 3$$

$$\int_C z^2\, dz = -3\left(e^{-6}.\, e^{\pi i}\right) + 3$$

$$\int_C z^2\, dz = -3e^{-6}(\cos\pi + i\sin\pi) + 3$$

$$\int_C z^2\, dz = -3e^{-6}(-1 + 0) + 3$$

$$\int_C z^2\, dz = 3e^{-6} + 3$$

$$\int_C z^2\, dz = 3(e^{-6} + 1)$$

Contoh 4.6

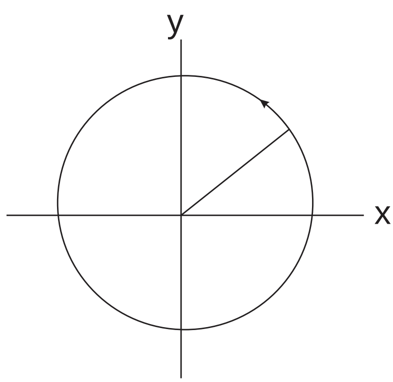
Tentukan nilai dari

$$\int_C \bar{z}\, dz$$

Dengan C adalah lingkaran satuan berlawanan dengan arah jarum jam.

Solusi

Diketahui C adalah lingkaran satuan berlawanan dengan arah jarum jam



Gambar 21. Lingkaran Satuan Berlawanan Jarum Jam

C dapat ditulis

$$z = x + yi, \qquad x = \cos t\,, \qquad y = \sin t \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$dz = dxdt + dyidt = d(\cos t)dt + id(\sin t)dt$$

$$dz = (-\sin t + i\cos t)dt$$

Sehingga

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C^{2\pi} (x - yi)\,dz$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C^{2\pi} (\cos t - i \sin t)\,(-\sin t + i \cos t)dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C^{2\pi} (-\sin t \cos t + i \cos^2 t + i \sin^2 t$$
$$- i^2 \sin t \cos t)dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C^{2\pi} (-\sin t \cos t + i \cos^2 t + i \sin^2 t + \sin t \cos t)dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C^{2\pi} (i \cos^2 t + i \sin^2 t)dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = i \int_C^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = i \int_C^{2\pi} 1dt$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = it|_0^{2\pi}$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = i(2\pi - 0)$$

$$\int_C \bar{z}\,dz = 2\pi i$$

Contoh 4.7

Tentukan nilai dari $\int_C \cos z\,dz$ dengan C adalah ½ Lingkaran dengan $r = \pi,\ x \geq 0, -\pi i \leq x \leq \pi i$!.

Solusi

Diketahui C adalah ½ Lingkaran dengan $r = \pi,\ x \geq 0, -\pi i \leq x \leq \pi i$.

$$\int_C \cos z\, dz = \int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z\, dz$$

$$\int_C \cos z\, dz = \sin z \,|_{-\pi i}^{\pi i}$$

$$\int_C \cos z\, dz = \sin \pi i - \sin -\pi i$$

$$\int_C \cos z\, dz = \sin \pi i + \sin \pi i$$

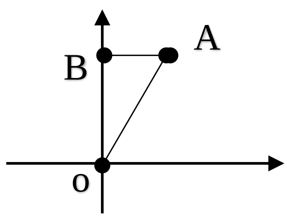
$$\int_C \cos z\, dz = 2 \sin \pi i$$

$$\int_C \cos z\, dz = 2i \sinh \pi$$

Contoh 4.8

Tentukan $\int_C\ z^2 dz$ bila C adalah lintasan tertutup OABO dengan $O(0,0), A(1,2), B(0,2)$!.

Solusi



Counter $C = C_1 + C_2 + C_3$ dengan C_1 adalah lintasan OB, C_2 adalah lintasan AB dan C_3 adalah lintasan BO.

$$\int_C z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz + \int_{BO} z^2 dz$$

Nilai dari $\int_{C_1} z^2 dz$

Lintasan C_1 yaitu dari titik $O(0,0)$ ke titik $A(1,2)$ mempunyai persamaan

$$y = 2x$$

$$z = x + iy = x + 2xi$$

$$dz = dx + d(2xi)$$

$$dz = dx + 2idx = (1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (x + yi)^2 (1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (x^2 - y^2 + 2xyi)(1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (x^2 - (2x)^2 + 2x(2x)i)(1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (x^2 - 4x^2 + 4x^2 i)(1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (-3x^2 + 4x^2 i)(1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_0^1 (-3 + 4i)x^2 (1 + 2i)dx$$

$$\int_C z^2 dz = (-3 + 4i)(1 + 2i) \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_C z^2 dz = (-3 - 6i + 4i + 8i^2) \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_C z^2 dz = (-3 - 6i + 4i - 8) \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_C z^2 dz = (-11 - 2i) \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_C z^2 dz = (-11 - 2i) \frac{1}{3} x^3 |_0^1$$

$$\int_C z^2 dz = -\frac{1}{3}(11 + 2i)$$

Nilai dari $\int_{C_2} z^2 dz$

Lintasan C_2 yaitu dari titik $A(1,2)$ ke titik $B(0,2)$ mempunyai persamaan

$$y = 2$$

$$z = x + yi = x + 2i$$

$$dz = d(x + 2i) = dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_1^0 (x + 2i)^2 dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_1^0 (x^2 + 4i^2 + 4xi) dx$$

$$\int_C z^2 dz = \int_1^0 (x^2 - 4 + 4xi) dx$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2x^2 i\right]_1^0$$

$$\int_C z^2 dz = \left[\frac{1}{3}0^3 - 4.0 + 2.0^2 i\right] - \left[\frac{1}{3}1^3 - 4.1 + 2.1^2 i\right]$$

$$\int_C z^2 dz = \left[4 - \frac{1}{3} - 2i\right] = \left[\frac{11}{3} - 2i\right]$$

Nilai dari $\int_{C_3} z^2 dz$

Lintasan C_3 yaitu dari titik $B(0,2)$ ke titik $O(0,0)$ mempunyai persamaan

$$x = 0$$

$$z = x + yi = 0 + yi = yi$$

$$dz = d(yi) = idy$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = \int_2^0 (yi)^2 idy$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = i\int_2^0 -y^2 dy$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = i\left[-\frac{1}{3}y^3\right]_2^0$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = i\left(\left[-\frac{1}{3}.0^3\right] - \left[-\frac{1}{3}.2^3\right]\right)$$

$$\int_{C_3} z^2 dz = \frac{8}{3}i$$

Sehingga

$$\int_C z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz + \int_{BO} z^2 dz$$

$$\int_C z^2 dz = -\frac{1}{3}(11 + 2i) + \left[\frac{11}{3} - 2i\right] + \frac{8}{3}i$$

$$\int_C z^2 dz = -\frac{11}{3} - \frac{2}{3}I + \frac{11}{3} - \frac{6}{3}i + \frac{8}{3}i = 0$$

Jadi nilai integral counter $f(z)$ sepanjang lintasan C adalah 0.

Contoh di atas akan menjadi bagian dari teorema Cauchy.

D. TEOREMA CAUCHY

Teorema 4.2

Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika *f* analitik dan *f'* kontinu pada D maka,

$$\int_{c} f(z)\, dz = 0$$

Bukti :

Misal : $f = u + iv$; $z = x + iy \Longrightarrow dz = dx + idy$

Maka $\int_c \ f(z)\, dz = \int_c \ (u\ +\ \mathrm{i}v)(dx\ +\ \mathrm{i}dy)$

$$=\int_c \ u\, dx - v\, dy + i \int_c \ v\, dx + u\, dy$$

………… (1)

Menurut Teorema Green bahwa

$$\int_{c} P\, dx + Q\, dy = \iint_{R} \left(Q_x - P_y\right) dx\, dy$$

f kontinu dan analitik di R, maka *u* dan *v* juga kontinu di R. Dengan demikian juga jika *f'* turunan dari *f* kontinu di R, maka *f* turunan parsial order pertama dari *u* dan v.

Dengan menggunakan Teorema Green di atas, persamaan (1) menjadi :

$$\iint_{R} \left[\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \ i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dxdy$$

$$= \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + \ i \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

Berdasarkan persamaan Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Maka,

$$\int_c f(z)\, dz = 0$$

Jika C berorientasi negatif, maka persamaan di atas dapat ditulis:

$$\int_c f(z)\, dz = -\int_{-c} f(z)\, dz = 0$$

Sebagai akibat langsung dari Teorema Cauchy, integral suku banyak *p(z)*, e^z, sin *z*, cos *z* sekeliling sembarang lintasan tertutup adalah nol, sebab fungsi-fungsi ini fungsi utuh dan derivatif mereka kontinu di seluruh bidang kompleks.

Contoh 4.6

Jika C lingkaran $|z| = 1$ buktikan $\oint \frac{dz}{z^2 - 4}$ dan $\oint \tan z \, dz$ sama dengan nol.

Bukti :

Fungsi *f(z)* = $\frac{1}{z^2-4}$ analitik dan *f'(z)* = $\frac{-2z}{(z^2-4)^2}$ kontinu di dalam dan pada C, jadi menurut Cauchy $\int_c \ f(z)\, dz = 0$.

Fungsi $g(z) = \tan z$ analitik dengan $g'(z) = \sec^2 z$ kontinu di dalam dan pada C, sebab titik singular tan *z* dan titik kontinu $\sec^2$

z adalah titik nol dari cos z, yang semuanya terletak di luar C jadi $\oint \tan z \, dz = 0$.

Pada Teorema Cauchy di atas mencakup hipotesis tambahan bahwa *f'* kontinu pada D tetapi jika *f* analitik pada daerah D, maka *f'* juga analitik dan kontinu pada D. Oleh karena itu, Goursat berpendapat bahwa kekontinuan *f'* merupakan suatu hipotesis yang berlebihan. Hal ini sudah diimplikasikan oleh keanalitikan *f* sehingga lahirlah teorema Cauchy-Goursat.

E. TEOREMA CAUCHY-GOURSAT

Teorema 4.3

Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika *f* analitik pada D maka,

$$\int_{c} f(z) \, dz = 0$$

Untuk membuktikan Teorema Cauchy-Goursat, diperlukan lemma sebagai berikut:

Lemma:

Diberikan fungsi *f* yang analitik pada daerah tertutup D yang terdiri dari titik interior lintasan tertutup tunggal berarah positif C dan titik pada C sendiri. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan, maka D dapat diselimuti oleh daerahbujur sangkar atau daerah bagian bujur sangkar yang berhingga D_1, D_2, … , D_n, jadi D = $\bigcup_{j=1}^{n} D_j$, sedemikian hingga untuk setiap D_j dapat dicari titik $z_j \in D_j$ dan

$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon$ ………………. (1)

Untuk membuktikan lemma ini diperlukan teorema dalam analisis tentang barisan himpunan tertutup dan terbatas di bidang datar.

Teorema 4.4

Jika $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ suatu barisan tak hingga di bidang datar dengan sifat untuk setiap n ϵ N:

(i) K_n tidak kosong

(ii) K_n tertutup.

(iii) $K_n \supset K_{n+1}$.

Maka $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ $tidak\ kosong$

Bukti Lemma:

Lemma di atas akan dibuktikan dengan kontradiksi. Diandaikan bahwa lemma salah. Jadi diasumsikan bahwa:

Terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap n bilangan bulat positif dengan $D = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$, dimana D_j daerah bujursangkar atau bagiannya untuk $j = 1, 2, \ldots, n$, terdapat suatu j misalnya $j = m$ $(1 \leq m \leq n)$ dan tidak mungkin dicari $z_m \epsilon D_m$ dengan sifat untuk semua $z \epsilon D_m$ dan $z \neq z_m$ sehingga berlaku ketidaksamaan (1).

Dibuat bujursangkar tertutup B yang cukup besar dengan sisi a dan memuat D, kita bagi B menjadi empat bujursangkar tertutup E_{1s} (s = 1, 2, 3, 4) dengan menghubungkan titik tengah sisi-sisinya yang berhadapan. Mengingat asumsi di atas paling sedikit ada satu bujursangkar diantaranya E_{11}, E_{12}, E_{13},, E_{14} yang memotong D, namakan B_1, dan apabila $B_1 \cap D$ dibagi menjadi bujursangkar atau bagiannya yang banyaknya berhingga, paling sedikit ada satu bujursangkar atau bagiannya yang banyaknya berhingga memenuhi ketidaksamaan (1). Sekarang giliran B_1 kita bagi menjadi 4 bujursangkar E_{2s}(s = 1, 2, 3, 4) seperti di atas. Paling sedikit ada satu diantara keempat bujursangkar ini yang memotong D, namakan B_2, yang apabila dibagi menjadi bujursangkar atau bagiannya banyaknya berhingga, selalu ada satu bukursangkar atau bagiannya sehingga ketidaksamaan (1) dipenuhi. Demikian proses ini dikerjakan terus-menerus, kita memperoleh barisan tak hingga $B_1, B_2, \ldots, B_n$ dengan sifat bahwa untuk setiap n berlaku :

(i) $B_n^* = B_n \cap D$ tidak kosong.

(ii) B_n^* tertutup dan terbatas.

(iii) $B_n^* \supset B^*_{n+1}$

Dan untuk setiap n tidak ada $z_n \in B_n{}^*$ sehingga untuk z $\in$ B_n^* dan z $\neq$ z_n berlaku $\left|\frac{f(z)- f(z_n)}{z- z_n} - f'(z_n)\right| < \varepsilon.$

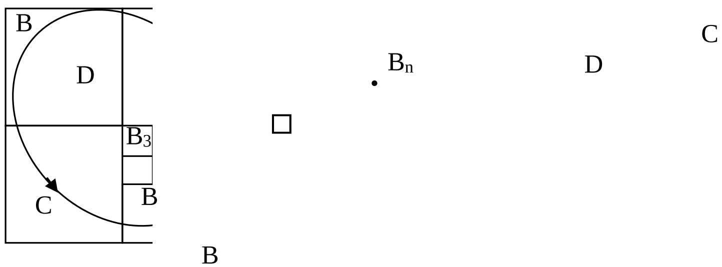
Perlu diingat bahwa panjang sisi B_n adalah $\frac{a}{2^n}$ serta B_n dan D tertutup dan terbatas, maka demikian juga Bn^* untuk setiap setiap nilai n. Menurut teorema dalam analisis di atas, terdapat titk C $\in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^*$. Karena C $\in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^*$ dan f analitik di C, maka untuk $\varepsilon > 0$ dalam asumsi di atas, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua z dalam kitar $N(\xi, \delta)$ berlaku ketidaksamaan

$\left|\frac{f(z)- f(z_n)}{z- z_n} - f'(z_n)\right| < \varepsilon$, dengan z $\neq \xi$.

Hal ini mungkin karena terdeferensiasi di ξ. Tetapi $\xi \notin B_n$ untuk setiap n. Jika dipilih n cukup besar sehingga diagonal $(\frac{a}{2^n})\sqrt{2}$ < δ, maka $B_n \subset N(\xi, \delta)$ (lihat gambar 22). Jadi untuk semua z $\neq \xi$

dan z ∉ B_n berlaku ketidaksamaan di atas. Maka ξ dapat bertindak sebagai $z_j \neq D_j$ dengan $D_j = B_n \cap D = B_n^*$ dan ketidaksamaan (1) berlaku. Terdapat suatu kontradiksi dan terbuktilah lemma tersebut.

Setelah lemma di atas dapat dibuktikan maka untuk selanjutnya kita siap membuktikan Teorema Cauchy-Goursat.



Gambar 22. Lintasan Tertutup B

Bukti Teorema Cauchy-Goursat

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Daerah D dibagi menjadi daerah bujur sangkar atau bagiannya dengan menarik garis-garis sejajar sumbu koordinat yang banyaknya berhingga, sebut saja n, dan untuk setiap bujursangkar atau bagiannya, D_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, ketaksamaan (1) berlaku. Daerah D dikelilingi dengan bujur sangkar yang sisi-sisinya sejajar sumbu koordinat dan panjangnya a (lihat gambar 22). Panjang sisi bujursangkar yang memuat D_j kita namakan a_j.

Untuk setiap $z \in D_j$ dengan z_j seperti yang dimaksudkan lemma, dibentuk fungsi

$$\sigma_j(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_j)}{z-z_j} - f'(z_j) & untuk\ z \neq z_j \\ 0 & untuk\ z = z_j \end{cases} \qquad \dots\dots\dots\dots (2)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$

Menurut ketaksamaan (1) berlaku

$\left|\sigma_j(z)\right| < \varepsilon, z \in D_j, j = 1, 2, \ldots, n$ ……………………… (3)

Fungsi $\sigma_j(z)$ kontinu di seluruh D_j dan $\left|z - z_j\right| \leq a_j\sqrt{2}$ untuk z $\in D_j$.

Selanjutnya kita namakan C_j berarah positif untuk lintasan perbatasan dari D_j, dan untuk $z \in D_j$, kita tulis

$$f(z) = f\left(z_j\right) + f'\left(z_j\right)\left(z - z_j\right) + (z - z_j)\sigma_j(z)$$

Jadi $\oint_{C_j} f(z)dz = f\left(z_j\right)\oint_{C_j} dz + f'(z_j)\oint_{C_j}\left(z - z_j\right)dz +$

$\oint_{C_j}\left(z - z_j\right)\sigma_j(z)dz$

Sedangkan menurut teorema Cauchy $\oint_{C_j} dz = 0$ dan $\oint_{C_j}\left(z - z_j\right)dz = 0$.

Jadi $\oint_{C_j} f(z)dz = \oint_{C_j}\left(z - z_j\right)\sigma_j(z)dz,\ j = 1, 2, \ldots, n$ …………(4)

Untuk D_j bujur sangkar penuh berlaku :

$\left|\oint_{C_j} f(z)dz\right| = \left|\oint_{C_j}\left(z - z_j\right)\sigma_j(z)dz\right| < a_j\sqrt{2}\,\varepsilon\, 4a_j = 4A_j\varepsilon\sqrt{2}$ ………… (5)

dimana A_j luas bujursangkar D_j.

Untuk D_j bagian dari bujursangkar, maka panjang C_j kurang dari $4a_j+L_3$ dimana L_3 panjang lintasan C yang berimpit yang berhimpit dengan C_3.

Sehingga diperoleh :

$\left| \oint_{C_j} f(z)dz \right| < a_j\sqrt{2}\varepsilon\left(4a_j + L_j\right) < \ 4A_j\varepsilon\sqrt{2} + \ aL_j\varepsilon\sqrt{2}$

…………….. (6)

dimana A_j luas bujursangkar penuh D_j dan a sisi bujursangkar yang merupakan lingkungan D. Perlu diingat bahwa $\sum_{j=1}^{n} A_j < a^2$.

Jumlah semua integral di ruas kiri pada persamaan (4) adalah

$\sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)dz = \ \oint_C \ f(z)dz$

…………………………………… (7)

Sebab dua integral sepanjang perbatasan berserikat setiap pasang bujursangkar yang bedekatan akan saling melenyapkan, integral yang satu diambil kea rah yang berlawanan dengan integral yang lain sepanjang perbatasan berserikat itu (gambar 2). Hanya integral sepanjang bagian-bagian lintasan C yang masih bertahan.

Berdasarkan hasil (5) dan (6) maka dari (7) diperoleh:

$\left| \oint_{C_j} f(z)dz \right| \leq \ \sum_{j=1}^{n} \left| \oint_{C_j} \left(z - z_j\right)\sigma_j(z)dz \right| < \sum_{j=1}^{n} (4A_j\varepsilon\sqrt{2} + aL_j\varepsilon\sqrt{2})$

$< 4a^2\varepsilon\sqrt{2} + \ aL\varepsilon\sqrt{2} = (4a^2 + aL)\varepsilon\sqrt{2}$

Dimana L panjang lintasan C. karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka haruslah

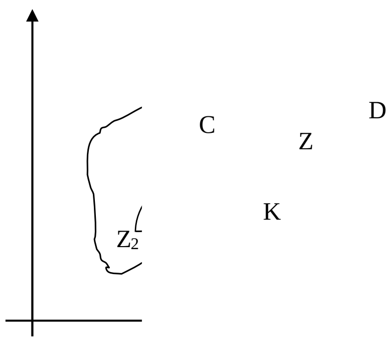
$\oint_C \ f(z)dz = 0$ (Teorema Cauchy-Goursat terbukti).

F. PERLUASAN TEOREMA CAUCHY-GOURSAT

Teorema 4.5

Diberikan daerh terhubung sederhana D, z_1 dan z_2 titik tetap dalam D, dan C, K dua lintasan yang menghubungkan , z_1 dan z_2 dimana C, K ⊆ D. jika f analitik pada D maka

$$\int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz = \int_{\substack{z_1 \\ K}}^{z_2} f(z)dz$$



Gambar 23. Daerah Terhubung D

Misalkan $L = C + (-K)$ maka

$$L = \int_L f(z)dz; \qquad C = \int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz; \quad -K = \int_{\substack{z_1 \\ -K}}^{z_2} f(z)dz;$$

Berdasarkan Teorema Cauchy Goursat:

$$\int_L f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz + \int_{\substack{z_1 \\ -K}}^{z_2} f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz - \int_{\substack{z_1 \\ K}}^{z_2} f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz = \int_{\substack{z_1 \\ K}}^{z_2} f(z)dz$$

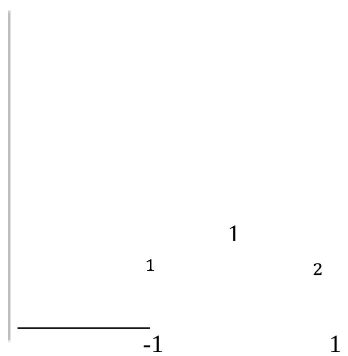
Contoh 4.7

Hitunglah $\int_C (3z^2 - 2z)dz$ dimana

C_1: busur lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ dari titik $(-1,0)$ ke $(0,1)$

C_2: ruas garis dari titik (0,1) ke (1,0)

$C = C_1 + C_2$



Gambar 24. Lintasan C

Solusi

Karena $f(z) = 3z^2 - 2z$ analitik pada C yang memuat $z_1 = -1$ dan $z_2 = 1$. Menurut teorema di atas harus dipilih lintasan sembarang dari z_1 dan z_2. Lintasan yang paling mudah dalam kasus ini garis lurus dari z_1 ke z_2 adalah lintasan $K: y = 0, -1 \leq x \leq 1$. Dengan demikian diperoleh

$$\int_C (3z^2 - 2z)dz = \int_{-1}^{1} (3x^2 - 2x)dx$$

$$\int_C (3z^2 - 2z)dz = [x^3 - x^2]_{-1}^{1}$$

$$\int_C (3z^2 - 2z)dz = (1^3 - 1^2) - ((-1)^3 - (-1)^2)$$

$$\int_C (3z^2 - 2z)dz = (1 - 1) - (-1 - 1) = 0 - (-2) = 2$$

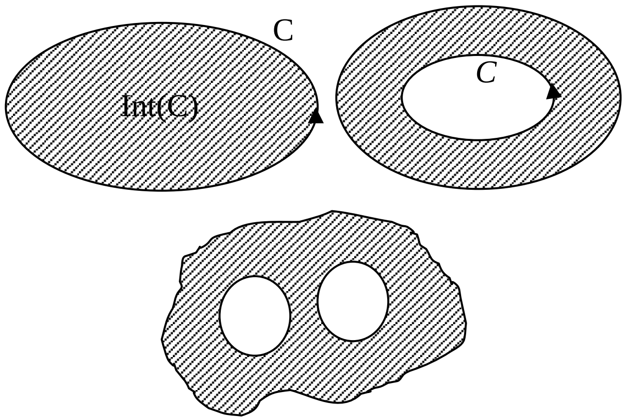
G. DAERAH TERHUBUNG SEDERHANA DAN DAERAH TERHUBUNG GANDA

Pada pembahasan sebelumnya telah didefinisikan bahwa himpunan terbuka dikatakan terhubung jika setiap dua titik dalam himpunan dapat dihubungkan oleh garis patah yang seluruhnya terletak dalam himpunan itu. Suatu himpunan dikatakan terhubung tunggal jika setiap lintasan tertutup tunggal dalam himpunan itu mengelilingi hanya titik-titik anggota himpunan itu. Himpunan terhubung yang tidak terhubung tunggal dinamakan terhubung ganda.

Contoh: Himpunan $D = \{z: |z| < 1\}$ adalah suatu domain yang terhubung tunggal, sedngkan $E = \{z: 1 < |z| < 2\}$ adalah suatu domain terhubung ganda.

D domain terhubung sederhana $\Leftrightarrow \forall\, C$: lintasan tertutup sederhana, $C \subseteq D \Rightarrow Int\ (C) \subseteq D$ domain tertutup sederhana.

D domain terhubung ganda $\Leftrightarrow \exists\, C$: lintasan tertutup sederhana, $C \subseteq D \wedge Int\ (C) \not\subset D$. Domain terhubung ganda disebut annulus.



Gambar 25. Annulus Ganda

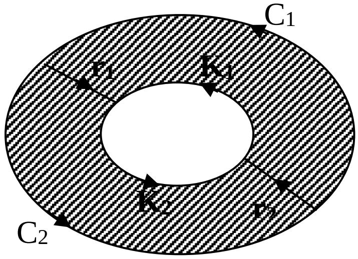
H. TEOREMA ANNULUS

Teorema 4.6

Jika C dan K lintasan tertutup sederhana dan f analitik pada annulus (C,K) orientasi C, K positif maka

$$\oint_c f(z)dz = \int_k f(z)dz$$

Bukti :



Gambar 26. Lintasan C dan K

Lintasan C = C_1+C_2 dan lintasan K = K_1+K_2.

Perhatikan dua lintasan tertutup sederhana $C_1 + r_1 - K_1 - r_2$ dan $C_2 + r_2 - K_2 - r_1$.

Menurut teorema Cauchy diperoleh

$$\oint_{C_1+r_1-K_1-r_2} f(z)dz + \int_{C_2+r_2-K_2-r_1} f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left[\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{r_1} f(z)dz + \oint_{-K_1} f(z)dz + \oint_{-r_2} f(z)dz\right]\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{r_1} f(z)dz - \oint_{K_1} f(z)dz - \oint_{r_2} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{r_2} f(z)dz - \oint_{K_2} f(z)dz - \oint_{r_1} f(z)dz\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{K_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz - \oint_{K_2} f(z)dz = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz = \oint_{K_1} f(z)dz + \oint_{K_2} f(z)dz$$

$$\Leftrightarrow \oint_{C} f(z)dz = \oint_{K} f(z)dz \quad \text{(Terbukti)}$$

Teorema Perluasan Annulus

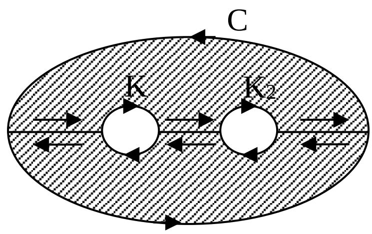
Teorema 4.7

Diberikan C, K_1, K_2, ... ,K_n : (n + 1) lintasan tertutup sederhana. Jka f analitik pada $C \cup (\bigcup_{i=1}^{n} K_i) \cup Ann\,(C, K_1, K_2, \ldots, K_n)$

maka C,K positif maka

$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_K f(z)dz$

Bukti :



Gambar 27.Lintasan tertutup sederhana $C, K_1, K_2, \ldots, K_n$

f analitik pada annulus ganda (C, K_1 , K_2 , K_3 , ..., K_n) maka

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{K_1} f(z)dz + \oint_{K_2} f(z)dz + \oint_{K_3} f(z)dz + \ldots$$

$$+ \oint_{K_n} f(z)dz$$

$\Leftrightarrow \oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{K_1} f(z)dz$

Contoh 4.8

Buktikan bahwa jika C lintasan tertutup sepanjang sisi-sisi bujursangkar dengan titik-titik sudut $1 + i, -1 + i, -1 - i, 1 - i$, dengan arah positif maka

$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i.$

Bukti:

Dibuat lingkaran γ dengan pusat O dan radius $\frac{1}{2}$ berarah positif., dengan mengambil $z_0 = 0$ dan $R = \frac{1}{2}$ maka $\oint_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$. Fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ analitik kecuali di titik O jadi jelas bahwa $f(z)$ analitik pada C dan pada γ dan daerah di antara kedua lintasan ini. Menurut perluasan teorema Cauchy-Goursat, maka

$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i.$ (Terbukti)

I. INTEGRAL TAK TENTU

Ambil dua titik z_0 dan z dalam domain terhubung tunggal D dimana fungsi $f(z)$ analitik di seluruh domain. Misal C_1 dan C_2 dua counter yang menghubungkan z_0 ke z dan seluruhnya terletak dalam D, maka C_1 dan $-C_2$ bersama-sama akan membentuk sebuah counter tertutup.

Karena teorema Cauchy-Goursat berlaku untuk sembarang counter tertutup dalam domain terhubung tunggal, maka diperoleh bahwa:

$$\int_{C_1} f(s)ds - \int_{C_2} f(s)ds = 0$$

Yang mana s menyatakan titik-titik pada C_1 dan C_2

Integral dari z_0 ke z yakni $\int_{z_0}^{z} f(s)ds$ ini tidak tergantung pada pemilihan dan sepanjang couter C dalam D. integral ini akan menentukan sebuah fungsi $F(z)$ pada domain terhubung tunggal D dan ditulis.

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

Sudah tentu derivative dari $F(z)$ yakni $F^1(z)$ ini ada dan sama dengan $f(z)$

Dengan demikian bentuk

$$F(z) = \int f(z)dz$$

Dapat dikatakan sebagai integral tak tentu atau anti derivative dari f.

Adapun nilai integral tertentu dapat dihitung dengan memasukkan nilai pada integral tak tentu yaitu:

$$\int_a^b f(z)dz = \int_{z_0}^b f(z)dz - \int_{z_0}^a f(z)dz$$

$$\int_a^b f(z)dz = F(b) - F(a)$$

Contoh

Fungsi $f(z) = z^2$ dan $F(z) = \frac{1}{3}z^3$ adalah fungsi menyeluruh maka dapat dinyatakan bahwa $F(z) = \int f(z)dz$ yakni:

$$\int z^2 dz = \frac{1}{3}z^3$$

Sehingga untuk menentukan nilai integral tertentu f dari $z = 0$ sampai $z = i$ dapat dilakukan dengan mensubstitusikan nilai titik tersebut ke integral tak tentu.

$$\int_0^i z^2 dz = \left[\frac{1}{3}z^3\right]_0^i = \left(\frac{1}{3}i^3 - \frac{1}{3}.0^3\right) = \frac{1}{3}(-i) = -\frac{1}{3}i$$

J. INTEGRAL CAUCHY

Teorema 4.7 (Integral Cauchy)

"Jika fungsi f didefinisikan dan analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tungal C yang berarah positif dan z_0 titik sembarang di dalam C maka

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz}$$

<u>*Catatan :*</u>

Karena nilai – nilai z di ruas kanan (1) yang diperhatikan hanya terletak pada C, ini berarti bahwa nilai fungsi analitik f untuk titik – titik di dalam C ditentukan oleh nilainya di titik – titik pada C. Rumus (1) dinamakan "***Rumus Integral Chauchy***"

<u>**Bukti:**</u>

Rumus akan terbukti jika kita dapat membuktikan bahwa untuk setiap ε > 0 yang dibentuk

$$\left|\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f\,(z_0)\right| < 0$$

Kita lukis lingkaran kecil γ di dalam C dengan pusat z_0 dan radius ρ berarah positif. Kita sudah mengenal bahwa nilai $\oint_\gamma - \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$. Karena fungsi $F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$analitik pada C dan γ dan ρ pada daerah di antara mereka, maka $\oint_C F(z)z = \oint_\gamma F(Z)dz$.

Diberikan ε > 0 sembarang. Karena f analitik di z_0 maka f kontinu di z_0. Maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk semua z dan $|z-z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Jadi diperoleh

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)\,dz - F(z_0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left|\oint_C \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right|$$

Jika dipilih $\rho < \delta$ maka untuk z pada γ berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ dan $|z - z_0| = \rho$. Mengingat panjang lintasan γ sama dengan $2\pi\rho$, maka diperoleh

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - f(z_0)\right| < \frac{1}{2\pi i}\frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = \varepsilon$$

Dengan demikian lengkaplah bukti rumus integral chauchy yang menyajikan nilai fungsi analitik di suatu titik ke dalam bentuk integral.

Teorema 4.8

Diberikan C lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif dan $z_{0 \in Int\ C}$ Jika f analitik pada C U *lnt C*, *maka*

$$f\ (z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\ (z)}{z - z_0}\ dz\ \leftrightarrow 2\ \pi i . f(z_0)$$

Contoh 4.9

Tentukan $\oint_C \frac{zdz}{(9 - z^2)(z+i)}$, C: |2| Orientasi C positif!

Solusi

$$\oint_C \frac{zdz}{(9 - z^2)(z + i)} = \oint_C \frac{zdz}{(3 + z)(3 - z)(z + i)}$$

C

Titik singularnya :

z_1 = 3 Є *eks (C)*

z_2 = -3 Є *eks (C)* Z_2= -3 Z_1=3

z_3 = -i Є *int (C)*

Dipilih $z_0 = -i$ supaya $(z) = \frac{z}{9 - z^2}$, f analitik pada $C \cup int\ (C)$

$$\int_C \frac{zdz}{(9 - z^2)(z + i)} dz = \int_C \frac{\frac{z}{(9 - z^2)}}{(z + i)} = \int_C \frac{\frac{z}{(9 - z^2)}}{z - (-i)}$$

Karena $z_0 = -i$ dan $f(z) = \frac{z}{9 - z^2}$ dan dengan menggunakan integral cauchy, maka persamaan di atas dapat ditulis:

$$\int_C \frac{zdz}{(9-\ z^2)(z+i)}dz = \int_C \frac{\frac{z}{(9-\ z^2)}}{z-(-i)} = 2\pi i f(z_0)$$

$$\int_C \frac{zdz}{(9-\ z^2)(z+i)}dz = 2\pi i f(-i)$$

$$\int_C \frac{zdz}{(9-\ z^2)(z+i)}dz = 2\pi i\left(\frac{-i}{9-(-i)^2}\right)$$

$$\int_C \frac{zdz}{(9-\ z^2)(z+i)}dz = 2\pi i\left(-\frac{i}{10}\right)$$

$$\int_C \frac{zdz}{(9-\ z^2)(z+i)}dz = -\frac{1}{5}\pi i^2 = \frac{1}{5}\pi$$

K. DERIVATIF FUNGSI ANALITIK

C : lingkungan tertutup sederhana

Z_0 Є *lnt C.*

F analitik pada C U *lnt C* →

1) $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\ z_0)^2}\ dz$

2) $f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}, dz$

   *

   *

   *

3) $f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, dz$

Bukti :

1.) $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-\ z_0)^2}\ dz$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\,(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\,(z)}{z-(z_0)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\,(z)}{z - z_0}\, dz}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\oint_C f(z) \left[\frac{1}{z-(z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0}\right] dz}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\oint_C f(z) \frac{(z - z_0) - (z - z_0 + \Delta z)}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)}\, dz}{\Delta z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\Delta z \to 0} \oint_C f\,(z) \frac{dz}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)}$$

Akan dibuktikan

$$\lim_{\Delta z \to 0} \oint_C f\,(t) \frac{dz}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)} = \oint_C \frac{f\,(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

$$= \left| \oint_C \frac{f\,(z)\, dz}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)} - \oint_C \frac{f\,(z)}{(z - z_0)^2}\, dz \right|$$

$$= \left| \oint_C \left[\frac{1}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)} - \frac{1}{(z - z_0)^2}\right] dz \right|$$

$$= \left| \oint_C \frac{f\,(z)}{z - z_0} \left[\frac{1}{(z - z_0 - \Delta z)} - \frac{1}{(z - z_0)}\right] dz \right|$$

$$= \left| \oint_C \frac{f\,(z)}{z - z_0} \left[\frac{\Delta z}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)}\right] dz \right|$$

$$= \left| \oint_C \frac{f\,(z)\Delta z}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)}\, dz \right|$$

D = min $|z - z_0|\ z \in C$

$|z - z_0 - \Delta z| = |(z - z_0) - \Delta z| \geq \big||z - z_0| - |\Delta z|\big|$

$$= d - |\Delta z|$$

$$0 \leq \left| \oint_C \frac{f\,(z)\Delta z}{(z - z_0)^2 (z - z_0 - \Delta z)}\, dz \right| \leq \frac{M\,|\Delta z||C|}{d^2\,(d - |\Delta z|)} \to 0$$

Bila $\Delta z \to 0$

Maka

$$\lim_{\Delta z \to 0} \oint_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)} = \oint_C \frac{f\,(z)\,dz}{(z - z_0)^2}$$

Jadi

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\,(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

2.) $f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f\,'(z_0 + \Delta z) - f'(z_0)}{\Delta z}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\,(z)}{(z - z_0 - \Delta z)}\, dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f\,(z)}{(z - z_0)^2}\, dz}{\Delta z}$$

Dst

Contoh 4.10

Hitunglah integral berikut

$$\oint_C \frac{z^4 + 2z + 3}{(z-1)^3}\, dz$$

C : lengkungan tertutup sederhana yang tak melalui 1.

Solusi

Kasus (1) : $1 \notin Int\ C$

Ambil $g\ (z) = \frac{z^4 + 2z+3}{(z-1)^3}$ → g(z) analitik pada $C \cup Int\ C$

Jadi $\oint_C \frac{z^4 + 2z+3}{(z-1)^3}\, dz = 0$

Kasus (2) : $1 \in Int\ C$ analitik pada $C \cup Int\ C$

Ambil $f\ (z) = z^4 + 2z + 3,$ maka *f* analitik pada C ∪ *Int. C*

$$\oint_C \frac{z^4 + 2z + 3}{(z-1)^3}\, dz = \int_C \frac{f(z)dz}{(z-1)^3} = \frac{2\pi i}{2!} f''(1)$$

$$f'(z) = 4z^3 + 2, \qquad f''(z) = 12z^2$$

$$f''(1) = 12$$

$$\oint_C \frac{z^4 + 2z + 3}{(z-1)^3}\, dz = \frac{2\pi i}{2!}.12 = 12\pi i$$

Jadi, $\oint_C \frac{z^4 + 2z+3}{(z-1)^3}\, dz = 12\pi i$

L. TEOREMA MORERA

Teorema 4.9

Diberikan D domain, dan *f* fungsi kontinu di setiap titik di D. Integral *f* di kitar lintasan tertutup di D selalu bernilai nol. Berdasarkan teorema Cauchy-Goursat *f* memiliki anti turunan di

D, dengan $F'(z) = f(z)$. Jika F fungsi analitik di setiap titik di D maka $f(z)$ juga analitik. Pada tahun 1856-1909 Morera menemukan sebuah teorema yaitu:

Jika f adalah fungsi kontinu pada domain D dan jika

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

Untuk setiap lintasan tertutup sederhana di D, maka f analitik pada D. Teorema Morera merupakan kebalikan dari teorema Cauchy-Goursat.

M. TEOREMA MODULUS MAKSIMUM

Lemma: Andaikan $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ ditiap titik z dalam daerah $|z - z_0| < \varepsilon$ dimana f analitik. maka f(z) punya nilai konstan, f(z_0) berada disekitar lingkungannya.

Teorema 4.10

Jika fungsi f analitik dan tidak konstan di domain D, maka $|f(z)|$ tidak punya nilai maksimum di D.oleh karena itu tidak ada titik z_0 di domain.sehingga $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ untuk semua titik z di daerah domain.

Corollary

Andaikan fungsi f kontinu di daerah tertutup dan terbatas R dimana fungsi tersebut analitik dan tidak konstan di interior R maka nilai maksimum $|f(z)|$ di R ,selalu dicapai dibatas R dan tidak pernah diinterior.

Contoh

Misalkan R dinotasikan dengan daerah persegi panjang $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1$. Diberikan $|f(z)| = \sin z$ punya sebuah nilai maksimum di R yaitu pada batas dan tidak diinterior di R.

$$|f(z)| = \sqrt{sin^2 + sinh^2}\, y$$

Bentuk sin^2 adalah paling besar ketika $x = \frac{\pi}{2}$.kemudian penambahan $\sinh^2 y$ adalah paling besar ketika $y = 1$. Oleh karena itu nilai maksimum dari $|f(z)|$ di R terletak di batas $z = (\frac{\pi}{2}, 1)$ dan tidak ada titik lain di R.

Sebagai akibat dari teorema modulus maksimum, pembaca dapat mengamati, bahwa jika f(z)=u(x,y)+iv(x,y) analitik pada daerah D yang dibatasi oleh lintasan tertutup C, maka fungsi harmonik u(x,y) kontinu pada D dan mencapai maksimum di suatu titik pada C, tidak pernah di titik interior dari D , kecuali jika u(x,y) suatu konstanta. Untuk membuktikan ini, pembaca dipersilahkan menyelidiki fungsi $e^{f(z)}$ analitik yang analitik pada D, sehingga $\left|e^{f(z)}\right| = e^{u(x,y)}$ mencapai maksimum hanya di titik perbatasan dari D :jadi u(x,y) sediri mencapai maksimum hanya dititik perbatasan.

N. TEOREMA DAN ASAS LIOUVILLIE

Pada pembahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi yang analitik diseluruh bidang kompleks seperti , e^z, $\sin z$, $\cos z$ adalah tak terbatas, artinya nilai mutlak tak terbatas. Ternyata semua fungsi utuh yang tak konstan pasti tak terbatas jadi fungsi utuh yang terbatas pasti suatu konstanta.

Teorema 4.11 (Teorema Liouvilli)

"Jika f fungsi yang analitik dan terbatas diseluruh bidang kompleks, maka f haruslah suatu konstanta."

Bukti:

Karena f terbatas pada $\mathbb{C}$ maka terdapat $M > 0$ sehingga $\left||f(z)| \leq M\right.$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$, maka terdapat $R > 0$ sehingga $|z| < R$. fungsi f analitik didalam dan pada lingkaran C dengan persamaan $|\,\varsigma\,|$= R . karena z dan 0 di dalam C menurut rumus integral Cauchy berlaku

$$|f\ (z) - f\ (0)| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\frac{f\ (\varsigma)}{\varsigma - z} - \frac{f\ (\varsigma)}{\varsigma}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{2\pi} \left|\oint_C \frac{z\ f\ (\varsigma)}{(\varsigma - z\ )\varsigma}\ d\varsigma\right|$$

Untuk pada C diketahui $|\,\varsigma\,|$ = R, $|\,\varsigma - z\,| \geq$ R - $|\,z\,|$ dan $|\,f\ (\varsigma)\,| \leq$ M :

Karena panjang lintasan C sama dengan 2πR, maka

$$|f\ (z) - f\ (0)|\,\frac{M\,|\,z\,|\ 2\pi R}{2\pi(R - |\,z\,|)} = \frac{M\ |z|}{R - |z|}$$

Ketaksamaan ini berlaku untuk semua R > $|z|$, sebab untuk semua C dengan radius R ini f selalu analitik didalam dan pada C dan 0 dan z selalu didalam C.

Jika diberikan sembarang ε > 0 selalu dapat dipih R sehingga $\frac{M\ |z|}{R-|z|} < \varepsilon$, jadi $|f\ (z) - f\ (0)| < \varepsilon$. Dengan demikian harus berlaku $|f\ (z) - f\ (0)| < 0$. Karena z sembarang maka $f\ (z) = f(0)$ untuk semua z Є ℂ, jadi $f\ (z)$ konstanta pada ℂ.

O. TEOREMA DASAR DALAM ALJABAR

Teorema 4.12

Untuk sembarang suku banyak $P\ (z) = a_0 + a_1 z + \ldots. + a_n z^n$ dengan $a_n \neq 0$ dari derajat $n \geq 1$ paling sedikit ada satu nilai z_0 sehingga $P(z_0) = 0$. Dengan kata lain pesamaan $P(z) = 0$ paling sedikit punya satu akar.

Bukti:

Teorema ini akan dibuktikan dengan kontradiksi. Diandaikan bahwa tidak ada z sehingga $p(z) = 0$, jadi $p\ (z) \neq 0$ untuk semua z Єℂ. Dibentuk fungsi $f(z) = \frac{1}{P(z)}$.

Maka fungsi ini analitik diseluruh bidang kompleks.

Akan dibuktikan bahwa f terbatas pada ℂ. Kita tulis $P\ (z) = z^n\ g\ (z)$ dengan $g(z) = \mathrm{a_0 z^{-n}} + \mathrm{a_1 z^{-n+1}} + \cdots + \mathrm{a_{n-1} z^{-1}} + \mathrm{a_n}$. nilai $\lim_{z \to \sim} g(z) = a_n \neq 0$, Maka terdapat $R > O$ sehingga untuk semua z dengan $|z| > R$ berlaku $\frac{|g(z)||a_n|}{2}$. Jadi untuk semua $|z| > R$ berlaku

$$|P(z)| > \frac{|z|^n |a_n|}{2} > \frac{R^n |a_n|}{2}$$

Dengan demikian untuk semua $|z| > R$ berlaku

$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} < 2|a_n|^{-1} R^{-1}$.

Di mana R suatubilangan positif tertentu. Sedangkan untuk semua $|z| \leq R$ fungsi $f(z)$ yang analitik ini terbatas, karena f kontinu pada daerah yang tertutup dan terbatas $(z: |z| > R)$. Jadi f terbatas di seluruh $\mathbb{C}$. Karena f juga analitik di seluruh $\mathbb{C}$, maka menurut Liouville $f(z)$ haruskonstan. Terdapat suatu kontradiksi sebab $P(z)$ tidak konstan. Jadi paling sedikit harus ada satu z sehingga $P(z) = 0$.

P. RANGKUMAN

1. Integral tentu untuk fungsi variabel kompleks $w(t)$ dengan variabel real t dimana $w(t) = u(t) + iv(t)$, dengan $u\ dan\ t$ adalah bilangan real dan $a \leq t \leq b$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

   $$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

   Jika masing-masing integral u dan v ada
2. Integral Counter didefinisikan sebagai integral suatu fungsi dari $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ yang kontinu sepotong-potong pada counter C serta fungsi $u[x(t), y(t)]$ dan $v[x(t), y(t)]$ dari $f[z(t)]$ kontinu sepotong-sepotong dari t dan dapat ditulis:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f[z(t)]z^1(t)dt$$

3. Teorema Cauchy: Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika *f* analitik dan *f'* kontinu pada D maka,

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

4. Teorema Cauchy-Goursat: Diberikan daerah terhubung sederhana D dan lintasan tertutup sederhana C di D. Jika *f* analitik pada D maka,

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

5. Perluasan Teorema Cauchy-Goursat: Diberikan daerh terhubung sederhana D, z_1 dan z_2 titik tetap dalam D, dan C, K dua lintasan yang menghubungkan , z_1 dan z_2 dimana C, K ⊆ D. jika f analitik pada D maka

$$\int_{\substack{z_1 \\ C}}^{z_2} f(z)dz = \int_{\substack{z_1 \\ K}}^{z_2} f(z)dz$$

6. Teorema Annulus: Jika C dan K lintasan tertutup sederhana dan f analitik pada annulus (C,K) orientasi C, K positif maka

$$\oint_c f(z)dz = \int_k f(z)dz$$

7. Integral tak tentu atau anti derifatif dari suatu fungsi $f(z)$ dapat ditulis:

$$F(z) = \int f(z)dz$$

8. Integral Cauchy: Jika fungsi f didefinisikan dan analitik di dalam dan pada lintasan tertutup tungal C yang berarah positif dan z_0 titik sembarang di dalam C maka

$$\boldsymbol{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz}$$

9. Teorema Morera: Jika f adalah fungsi kontinu pada domain D dan jika

$$\oint_C f\,(z)\,dz = 0$$

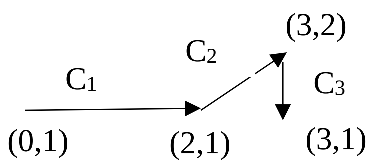
10. Teorema Modulus Maksimum: Jika fungsi f analitik dan tidak konstan di domain D, maka $|f(z)|$ tidak punya nilai maksimum di D.oleh karena itu tidak ada titik z_0 di domain.sehingga $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ untuk semua titik z di daerah domain
11. Teorema Liouvilli: Jika f fungsi yang analitik dan terbatas diseluruh bidang kompleks, maka f haruslah suatu konstanta.

Q. LATIHAN

1. Hitunglah nilai dari integral berikut!
   a. $\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$
   b. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{i2t} dt$

c. $\int_0^2 (t^3 - 2t^2 + 3t)dt$

2. Hitunglah $\int_C \ e^z dz$ sepanjang garis $y = 2x$ dari $(-1, -2)$ ke (1,2)!
3. Hitunglah $\int_C \ \frac{1}{z} dz$ sepanjang garis $C := x^2 + y^2 = 16$ arah positif!
4. Hitunglah $\int_C \ \bar{z}^2 dz$ sepanjang lintasan $y = x^2$ dari (0,0) ke (1,1)!
5. Tentukan $\int_C \ \frac{z+2}{z}$ dengan:
   a. C adalah setengah lingkaran dengan $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$
   b. C adalah setengah lingkaran dengan $z = 2e^{i\theta}$, $(\pi \leq \theta \leq 2\pi)$
   c. C adalah lingkaran penuh dengan $z = 2e^{i\theta}$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$
   d. C adalah garis $z = x$, $(1 \leq x \leq 2)$
6. Hitunglah $\int_C \ (x^2 + y^2)dz$ sepanjang lintasan $C: x = t^2, y = \frac{1}{t}$, $1 \leq t \leq 3$
7. Hitunglah $\int_C \ \bar{z}dz$ sepanjang $C = C_1 + C_2 + C_3$ seperti gambar berikut.



8. Tentukan integral dari $f(z) = y - x - 3x^2 i$ sepanjang counter C jika:
   a. C adalah segmen garis dari $z = 0$ ke $z = 1 + i$
   b. $C = C_1 + C_2$ dimana C_1 adalah segmen dari $z = 0$ ke $z = i$ dan C_2 adalah segmen dari $z = i$ ke $z = 1 + i$.

9. Hitung $\int_C (z-1)dz$ dan C adalah busur dari $z = 0$ ke $z = 1$ pada:
   a. Setengah lingkaran $z - 1 = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi$
   b. Segmen garis pada sumbu $x,\ 0 \leq x \leq 2,\ y = 0$
10. Hitung $\int_C e^z dz$ dengan C adalah busur dari $z = \pi i$ ke $z = 1$ pada:
   a. Segmen garis yang menghubungkan kedua titik tersebut.
   b. Bagian sumbu x yang menghubungkan titik-titik tersebut.

BAB VI
BARISAN DAN DERET KOMPLEKS

A. BARISAN DAN DERET BILANGAN REAL

Konsep barisan dan deret bilangan rill sebelumnya sudah diperkenalkan pada mata kuliah kalkulus dan analisis real. Secara sederhana, barisan merupakan susunan dari bilangan−bilangan yang urutannya berdasarkan bilangan asli. Suatu barisan yang terdiri dari n suku biasanya dinyatakan dalam bentuk $a_1, a_2, \ldots a_n$. Dengan a_1 menyatakan suku ke – 1, a_2 menyatakan suku ke – 2, dan a_n menyatakan suku ke – n.

Definisi formal dari suatu barisan dapat ditulis sebagai berikut.

> Barisan bilangan rill dapat didefinisikan sebagai fungsi dengan domain himpunan bilangan asli $N \coloneqq \{1,2,3,\ldots\}$ dan range bilangan Rill R.
>
> Barisan tak hingga didefinisikan sebagai suatu fungsi real di mana daerah asalnya adalah bilangan asli. Notasi barisan tak hingga adalah

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ (Hjab, 2016)}$$

Contoh 4.11

1. Barisan 2,4, 6, 8, … bisa ditulis dengan $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$
2. Barisan $\frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \ldots$ bisa ditulis dengan $\left\{\frac{n}{2+n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

Suatu barisan tak hingga dikatakan konvergen menuju L, jika

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

atau

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\, N > 0\ \ni n\ \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$$

Contoh 5.1

Barisan $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots.\right)$ konvergen ke 0 karena $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dapat diliterka jika semakin besar n maka nilai barisan tersebut akan mendekati suatu titik yaitu 0.

B. BARISAN BILANGAN KOMPLEKS

Sebelum membicarakan kekonvergenan barisan bilangan kompleks, terlebih dahulu akan di perkenalkan pengertian barisan bilangan kompleks yang disajikan pada definisi berikut.

Definisi 5.1

Diberikan himpunan $A \subset C$. Barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi $f : N \to A$ yang di definisikan dengan $f(n) = z_n$ untuk setiap $n \in N$.

Nilai–nilai fungsi f dengan $f\ (\,n\,) =\ z_n$ untuk setiap $n \in N$ dapat dinyatakan dengan $f(1) = z_1, f\ (2) = z_2, \dots, f(n) = z_n$.

Fungsi f dengan $f(n) = z_n$ untuk setiap $n \in N$ adalah suatu barisan yang dapat dinyatakan dengan notasi $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Bilangan–bilangan $z_1, z_2, \dots$ disebut suku–suku barisan dan suku z_n disebut suku umum (suku ke-n) barisan (Brown & Churchill, 2014; Pathak et al., 2016).

Contoh 5.2

Fungsi f dengan $f\,(n) = i^n$ untuk setiap $n \in N$ adalah suatu barisan yang dinotasikan dengan $\{z_n\} = \{i, i^2, i^3, i^4, \ldots\} = \{i, -1, -i, 1, \ldots\}$ yang sering pula dinyatakan dengan $\{i^n\}$.

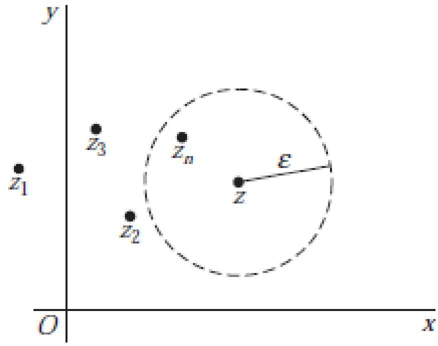
Sama seperti barisan bilangan rill, barisan bilangan kompleks ada yang konvergen da nada yang divergen. Untuk mengetahui apakah suatu barisan itu konvergen atau tidak, perlu dipereiksa apakah barisan tersebut mempunyai limit atau tidak. Hal ini disebabkan bahwa suatu barisan dikatakan konvergen jika barisan tersebut mempunyai limit (limitnya ada).

Definisi 5.2

Diberikan barisan bilangan kompleks $\{z_n\}$. Barisan $\{z_n\}$ dikatkan konvergen ke z jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n > n_0$ berlaku $|z_n - z| < \varepsilon$.

Bilangan kompleks z yang memenuhi definisi di atas disebut limit barisan $\{z_n\}$. Notasi barisan $\{z_n\}$ konvergen ke z adalah $z_n \to z \; atau \; \lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$.

Secara geometri definisi di atas dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 28. Konvergensi Bilangan Kompleks z

Barisan $\{z_n\}$ dikatakan divergen, jika barisan $\{z_n\}$ tidak konvergen. Dengan kata lain, barisan $\{z_n\}$ divergen (tidak konvergen ke z) jika dan hanya jika untuk setiap $z \in C$ terdapat bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n > n_0$ terdapat bilangan kompleks z_n sehingga berlaku $|z_n - z| \geq \varepsilon$.

Limit barisan bilangan kompleks selalu bernilai tunggal. Ketunggalan limit barisan tersebut di sajikan pada teorema berikut.

Teorema 5.1 (Ketunggalan Limit)

Jika suatu barisan bilangan kompleks konvergen, maka barisan tersebut mempunyai limit tunggal.

Bukti :

Dipunyai $\lim_{n\to\infty} z_n = z_1$ dan $\lim_{n\to\infty} z_n = z_2$ maka $z_1 = z_2$.

Andaikan $\lim_{n\to\infty} z_n = z_1$ dan $\lim_{n\to\infty} z_n = z_2$ tetapi $z_1 \neq z_2$.

Ambil sebarang bilangan $\varepsilon = \frac{1}{2}|z_1 - z_2| > 0$, terdapat bilangan asli n_0 sehingga jika $n > n_0$ berlaku $|z_n - z| < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ dan $|z_n - z| < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$

Diperoleh

$|z_1 - z_2| = |(z_1 - z_n) + (z_n - z_2)| \leq | z_1 - z_n| + | z_n - z_2| < \frac{1}{2}|z_1 - z_2| + \frac{1}{2}|z_1 - z_2| = |z_1 - z_2|$

Maka

$|z_1 - z_2| < |z_1 - z_2|$

Hal ini mustahil terjadi. Ini berarti pengandaian salah. Jadi haruslah $z_1 = z_2$ dengan kata lain $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ tunggal.

Contoh 5.3

Tunjukkan bahwa barisan $z_n = \frac{1}{n^2} + i$ konvergen ke i!

Solusi

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + i\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} + \lim_{n\to\infty} i = 0 + i = i$$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$ maka barisan z_n konvergen ke i.

Bukti formal dapat ditunjukkan sebagai berikut.

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+i\right)=i \leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists n_0 \in N | \forall n \geq n_0, n \in N \to \left|\left(\frac{1}{n^2}+\right.\right.$
$\left.\left.i\right)-i\right|<\varepsilon$

Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$.

$$\left|\left(\frac{1}{n^2}+i\right)-i\right|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\frac{1}{n}$$

Dapat dipilih $n_0=\frac{1}{\varepsilon}$ atau $\varepsilon=\frac{1}{n_0}$, sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ atau dapat ditulis $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$ atau $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$ akan berlaku:

$$\left|\left(\frac{1}{n^2}+i\right)-i\right|<\left|\frac{1}{n^2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$$

Contoh 5.4

Selidiki kekonvergenan barisan $\{1+\frac{z}{n}\}$.

Penyelesaian :

Diberikan bilangan $\varepsilon > 0$ sebarang . Diperoleh
$\left|1+\frac{z}{n}-1\right|=\left|\frac{z}{n}\right|=\frac{|z|}{n}<\varepsilon$ untuk $n>\frac{|z|}{\varepsilon}$.
Jadi terdapat bilangan asli $n_0>\frac{|z|}{\varepsilon}$ sehingga jika berlaku

$$\left|1+\frac{z}{n}-1\right|=\left|\frac{z}{n}\right|=\frac{|z|}{n}<\frac{\varepsilon}{|z|}.|z|=\varepsilon$$

Jadi barisan $\{1+\frac{z}{n}\}$ konvergen ke 1 .

Teorema 5.2

Diberikan bilangan $z_n = x_n + iy_n$ untuk setiap $n \in N$ dan $z = x + iy$. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{z_n} = z$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} x_\mathrm{n} = x$ dan $\lim_{n\to\infty} \mathrm{y_n} = y$.

Bukti :

($\Longrightarrow$) diberikan bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sebarang . Diketahui $\lim_{n\to\infty} \mathrm{z_n}$, berarti terdapat bilangan asli $\mathrm{n_0}$ sehingga jika $\mathrm{n} > \mathrm{n_0}$ berlaku $|z_n - z| = |(x_n + iy_n) - (x + iy)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$

Dengan demikian untuk sebarang $\varepsilon > 0$ diatas, terdapat bilangan asli $\mathrm{n_0}$ sehingga jika $\mathrm{n} > \mathrm{n_0}$ berlaku

$|x_n - x| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$ dan

$|y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon$.

Jadi terbukti bahwa

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{x_n} = x \; dan \; \lim_{n\to\infty} \mathrm{y_n} = y$

($\Longleftarrow$) Diberikan bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sebarang.

Diketahui

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{x_n} = x$ dan $\lim_{n\to\infty} \mathrm{y_n} = y$, berarti terdapat bilangan asli $\mathrm{n_1}$ dan $\mathrm{n_2}$ sehingga jika $\mathrm{n} > \mathrm{n_1}$ berlaku $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

Dan jika $\mathrm{n} > \mathrm{n_2}$ berlaku $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

Diambil n_0 = maks $\{n_{1,}n_2\}$, sehingga jika $\mathrm{n} > n_0$ berlaku

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(\mathrm{x_n} + \mathrm{iy_n}) - (x + iy)| = |(\mathrm{x_n} - \mathrm{x}) + i(y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty} \mathrm{z_n} = z$.

Contoh 5.5

Periksa ke konvergenan barisan $\{z_n\} = \left\{\frac{2n^2-2}{n^2+4} - \ i\,\frac{5n}{n^2+4}\right\}$.

Solusi

Namakan $z_n = x_n + \ iy_n$ dengan $x_n = \frac{2n^2-2}{n^2+4}$ dan $y_n = -\frac{5n}{n^2+4}$, sehingga diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-2}{n^2+4} = 2 \text{ dan } \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n^2+4}$$

Akibatnya ,

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \ i \lim_{n\to\infty} y_n = 2 \ + \ i.0 \ = \ 2$$

Jadi barisan $\{z_n\}$ konvergen ke 2 .

C. DERET BILANGAN KOMPLEKS

Diberikan barisan bilangan kompleks $\{z_n\}$. Kemudian dari barisan $\{z_n\}$ di bentuk barisan lain $\{s_n\}$ yang suku-sukunya didefinisikan dengan

$$s_1 = z_1$$

$$s_2 = z_1 + z_2$$

....

$$s_n = z_1 + z_2 + \ ... + \ z_n$$

....

Dan seterusnya.

Jika seterusnya barisan $\{s_n\}$ mempunyai limit, diperoleh jumlah tak berhingga

$$z_1 + z_2 + \ ... + \ z_n + \ ...$$

Jadi dalam simbol dituliskan dengan

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{s_n} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ disebut deret tak berhingga (deret bilangan kompleks). Bilangan–bilangan $z_1, z_2, ...$ dinamakan suku-suku deret, dan z_n dinamakan suku ke-n (suku umum). Barisan $\{\mathrm{s_n}\}$ dengan $\mathrm{s_n} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ dinamakan jumlah bagian ke n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Kekonvergenan suatu deret ditentukan oleh ada atau tidaknya limit barisan jumlah baginya . Kekonvergenan deret tersebut disajikan pada definisi berikut ini.

Definisi 5.3

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dikatakan konvergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n \to \infty} \mathrm{S_n} = S$.

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dikatakan divergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n \to \infty} S_n$ tidak ada .

Contoh 5.6

Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} i$ konvergen ke i .

Solusi

$$z_1 = \frac{1}{2} i \ , \ z_2 = \frac{1}{4} i \ , z_3 = \frac{1}{8} i \ \ , ... , z_n = \frac{1}{2^n} i$$

Jumlah baginya adalah

$S_1 = z_1 = \frac{1}{2}i = i\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$S_2 = z_1 + z_2 = \dfrac{1}{2}i + \dfrac{1}{4}i = i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\right) = i\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)$

$S_3 = z_1 + z_2 + z_3 = \dfrac{1}{2}i + \dfrac{1}{4}i + \dfrac{1}{8}i = i\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}\right)$

$= i\left(1 - \dfrac{1}{8}\right)$

....

$S_n = \frac{1}{2}i + \frac{1}{4}i + \frac{1}{8}i + \cdots + \frac{1}{2^n}i$

$= i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$

$= i\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

Diperoleh ,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} i\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

$= i \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

$= i$

Jadi terbukti bahwa $\{S_n\}$ konvergen ke i . Dengan kata lain deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen ke i .

Jika bilangan kompleks dinyatakan dengan z = x + iy maka jumlah bagian

$S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ menjadi $S_n = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) + \cdots + (x_n + iy_n)$

$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + i\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_n)$

$= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{x_k} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{y_k}$

Jadi deret $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{z_k}$ dapat di tulis dalam bentuk $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{z_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{x_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{y_n}$.

D. DERET TAYLOR DAN DERET MACLAURIN

Deret pangkat dengan jari-jari kekonvergenan tidak nol dapat dinyatakan sebagai fungsi analitik disetiap titik pada daerah kekonvergenannya. Pada pasal ini akan dibahas bahwa setiap fungsi analitik dapat dinyatakan dengan suatu deret pangkat. Situasi tersebut disajikan pada teorema berikut.

Teorema 5.3

Jika fungsi f analitik pada daerah terbuka $D = \{z : |z - z0| < r\}$, maka $f(z)$ untuk setiap $z \in D$ dapat dinyatakan ke dalam deret pangkat.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, dengan $a_n = \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{f^{(n)}(z_0)}}{\mathrm{n!}} (\mathrm{z - z_0})^{\mathrm{n}}$$

Bukti:

Diambil lintasan $C = \{t \in D : |t - z_0| = r\}$, $\in Int(C)$, dan $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{t-z}\, dt$

Karena $\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z- z_0)}$

$= \frac{1}{(t-z_0)-(1-\frac{z-z_0}{t-z_0})}$

$= \frac{1}{t-z_0}\left[1 + \frac{z-z_0}{t-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^2} + \ ... + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^{n-1}} + \frac{\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n}}{1-\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n}}\right]$

$= \frac{1}{t-z_0} + \frac{z-z_0}{(t-z_0)^2} + \frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3} + \ ... + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n(t-z)}$

Maka

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)}{t-z}\, dt$$

$= \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_c \frac{f(t)}{t-z_0}\, dt + (z-z_0)\oint_c \frac{f(t)}{(t-z_0)^2}\, dt + (z-\right.$

$\left. z_0)^2 \oint_c \frac{f(t)}{(t-z_0)^3}\, dt + \quad ... + (z-z_0)^{n-1} \oint_c \frac{f(t)}{(t-z_0)^n}\, dt\right] +$

$\frac{1}{2\pi i}(z-z_0)^n \oint_c \frac{f(t)}{(t-z_0)^n\,(t-z)}\, dt$

Menurut pengintegralan Cauchy, jika f analitik [ada $C \cup int(C)$ dan $z_0 \, \epsilon \, Int\ (C)$, Maka

$f\ (z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)}{t-z_0}\, dt$ dan $f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_c \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n-1}}\, dt$

oleh karena itu

$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0 + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots +$
$\frac{f^{n-1}(z_0)}{(n-1)!}(z - z_0)^{n-1} R^n,$

dengan $R_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \; f(t) \left[\frac{z-z_0}{t-z_0}\right]^n \frac{dt}{t-z}$ ……………………….(1)

akan dibuktikan $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Dari persamaan (1), diperoleh

$$|R_n| = \left|\frac{1}{2\pi i} \oint_c \; f(t) \left[\frac{z - z_0}{t - z_0}\right]^n \frac{dt}{t - z}\right|$$

Karena f analitik pada $C \cup int(C)$, maka terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga berlaku

$|f(z)| \le M$ untuk setiap $z \in C \cup int(C)$. Oleh karena itu diperoleh $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| < 1, \forall t \epsilon C$

Sedangkan untuk setiap $t \in C$ berlaku

$$\left(\frac{1}{t-z}\right) = \frac{1}{|t-z|} = \frac{1}{|t-z_0|-(z-z_0)} \le \frac{1}{|t-z_0|-(z-z_0)} = \frac{1}{r-|z-z_0|}$$

Menurut teorema bahwa

$$\left|\int_C \; f(t)dt\right| \le Ml(C), \text{ dengan } M = maks\,|f(z)|$$

Oleh karena itu diperoleh

$$0 \le |R_n| \le \frac{1}{2\pi} M \left[\frac{|z-z_0|}{r}\right]^n . \frac{1}{r-|z-z_0|} \,.2\pi r$$

$$= M_r \left[\frac{|z - z_0|}{r}\right]^n \cdot \frac{1}{r - |z - z_0|}$$

$$= k \left[\frac{|z-z_0|}{r}\right]^n \quad \text{dengan} \quad k = \frac{1Mr}{r-|z-z_0|}$$

Karena $\frac{|z-z_0|}{r} < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{|z-z_0|}{r}\right]^n = 0$. jadi $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ …………(2)

Dari persamaan (1) dan(2) diperoleh

$$f(\mathrm{z}) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^2 + \cdots + \frac{f^{n-1}(z_0)}{(n-1)!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}-1}$$

$$= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}$$

Contoh 5.7

Tentukan deret taylor dari $f(z) = \frac{1}{1+z}$ disekitar $z = i$.

Solusi

$$f(z) = \frac{1}{1+Z}, f(i) = \frac{1}{1+i}$$

$$f'(\mathrm{z}) = \frac{-1}{(1+z)^2}, f'(i) = \frac{-1}{(1+i)^2}$$

$$f''(z) = \frac{-2}{(1+z)^3}, f''(i) = \frac{2}{(1+i)^3}$$

$$f''(z) = \frac{-6}{(1+z)^4}, f'''(i) = \frac{-6}{(1+i)^4}$$

$$f^n(z) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+z)^{n+1}}, f^n(i) = \frac{(-1)^n\, n!}{(1+i)^{n+1}}$$

Jadi deret taylor dari $f\ (z) = \frac{1}{1+z}$ disekitar $z = \ i$ adalah

$$f\ (z) = \frac{1}{1+z}$$

$f\ (z)$konvergen ke $z = i \Leftrightarrow z - i = 0$

$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+(z-i)+i} = \frac{1}{(1+i)+(z-i)} = \frac{1}{1+\left(\frac{z-i}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+Z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \mathrm{Z}^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n$$

Jadi, deret taylor dari $f\ (z) = \frac{1}{1+z}$ di sekitar $z = i$ adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n} (z-i)^n$

Deret pangkat $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ analitik pada daerah $D = \{z: |z - z_0| < r\}$ disebut deret taylor untuk fungsi f disekitar z_0.

Jika $z_0 = 0$, diperoleh deret $f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ analitik pada daerah $D = \{z: |z - z_0| < r\}$ disebut deret maclaurin dari fungsi f disekitar 0.

Deret taylor $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ mempunyai jari-jari ρ dengan ρ = jarak z_0 ke titik singular f yg terdekat ke z_0. Sebagai contoh dapat dilihat bahwa fungsi $f(z) = \frac{1}{1+z}$ diuraikan dalam taylor dengan $z_0 = \mathrm{I}$ diperoleh

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}(z - i)^n$$

Mempunyai jari-jari kekonvergenan. $\rho =$ jarak terdekat antara $z_0 = \mathrm{I}$ dan titik $z = -1$ yang merupakan titik singular fungsi $f = |i - 1| = \sqrt{2}$

Contoh 5.8

Tunjukkan deret berikut dengan Deret Mclaurin!

1. $\frac{1}{1-z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 +$
2. $\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ldots$
3. $\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \ldots$
4. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \ldots$
5. $\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots$

Bukti

1. $\frac{1}{1-z} = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \ \dots$

   Bukti

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\ , f(0) = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$f'(\mathrm{z}) = \frac{-1}{(1-z)^2}\ , f'(0) = \frac{-1}{(1-0)^2} = -1$$

$$f''(\mathrm{z}) = \frac{2}{(1-z)^3}, f''(i) = \frac{2}{(1-0)^3} = 2$$

$$f''(\mathrm{z}) = \frac{-6}{(1-z)^4}, f'''(i) = \frac{-6}{(1-0)^4} = -6$$

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \qquad z_0 = 0$$

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(z-0)^1 + \frac{f''(0)}{2!}(z-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(z-0)^3$$

$$f(z) = 1 - z + \frac{2}{2!}(z-0)^2 + \frac{-6}{3!}(z-0)^3 + \cdots$$

$$f(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

2. $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ \dots$

Bukti

$$f(z) = \ln(1+z)$$

Dengan mendeferensialkan $\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \ ...$ suku demi suku akan diperoleh

$$\int_0^z \frac{1}{1-z}\, dt = \int_0^z 1 + \int_0^z t + \int_0^z t^2 + \ ...$$

$$\Leftrightarrow -\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \ ...$$

Jika z diganti –z, maka diperoleh

$$\Leftrightarrow \ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ ...$$

Jadi,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \ ...$$

3. $\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9} + \ ...$

$$f(x) = tan^{-1}z$$

Ingat kembali bahwa

$tan^{-1}z = \int_0^z \frac{1}{1-z^2}\, dt,$ dan

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \ ...$$

$$\Leftrightarrow tan^{-1}z = \int_0^z \frac{1}{1-z^2}\, dz = \int_0^z (1 + z^2 + z^4 + z^6 + \cdots)dz$$

$$\Leftrightarrow tan^{-1}z = z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ ...$$

Jadi, representasi deret pangkat untuk $tan^{-1}z$ adalah

$$tan^{-1}z = z - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ ...$$

4. $f(z) = \sin z$

Penyelesaian:

$$f(z) = \sin z$$

$$f'(z) = \cos \mathrm{z}$$

$$f''(z) = -\sin z$$

$$f'''(z) = -\cos z$$

$$f^{(4)}(z) = \sin \mathrm{z}$$

.

.

.

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

Jadi, $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} - \ ...$

5. $f(x) = cosh\, z$

Penyelesaian:

$f(z) = \cosh z$ $\quad f(0) = 1$

$f'(z) = \sinh \mathrm{z}$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(z) = \cosh \mathrm{z}$ $\quad f''(0) = 1$

$f'''(z) = sinh\, \mathrm{z}$ $\quad f'''(0) = 0$

.

.

.

.

.

.

Jadi, $\cosh z = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} + \ ...$

E. DERET LAURENT

Penguraian fungsi f ke dalam deret Taylor menyatakan fungsi tersebut di dalam daerah kekonvergenan. Tetapi hanya merupakan bagian daerah keanalitikannya. Misalkan deret $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergen ke $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pada cakram $|z < 1|$, meskipun f analitik dimana-mana kecuali pada $z = 1$. sekarang bagaimana penguraian deret yang menyatakan f di dalam daerah kekonvergenannya yang lebih luas, atau mungkin pada semua titik sehingga f analitik. Deret Laurent yang dapat menjawab permasalahan tersebut.

Lemma :

Diberiakn C, K dua lintasan tertutup sederhana $Int(C) \subseteq Int(K)$, $A = Ann(C, K)$. Jika f analitik pada A, maka untuk setiap $z \in A$ berlaku

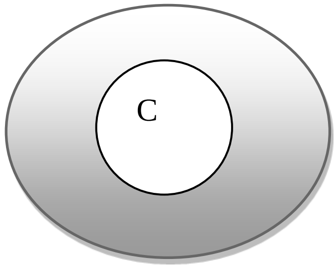
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t - z_n}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{t - z_n}\, dt$$

Bukti :

Diambil lintasan tertutup sederhana L, sehingga

K

$z \in Int(\,L\,) \subseteq A$. Menurut teorema perluasan Annulus diperoleh



Gambar 29. Lintasan C dan K

$$\frac{1}{2\pi i}\,.\oint_K \frac{1}{2\pi i}dt = \frac{1}{2\pi i}\,.\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\,.\oint_L \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt$$

sedangkan,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\,.\oint_L \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}.\oint_K \frac{f(t)}{t-z_0}dt - \frac{1}{2\pi i}.\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt$$

Jadi terbukti bahwa,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}.\oint_K \frac{f(t)}{t-z_0}dt - \frac{1}{2\pi i}.\oint_C \frac{f(t)}{t-z_0}\,dt$$

Teorema 5.4 (Teorema Laurent)

Diberikan C, K dua lintasan terhadap sederhana dengan $\mathrm{C} = \{\mathrm{t}: |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| = \mathrm{r}\}$ dan $\mathrm{K} = \{\mathrm{t}: |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| = \mathrm{R}\}$, dan $\mathrm{A} = \mathrm{Ann}(\mathrm{C}, \mathrm{K}) = \{\mathrm{t}: \mathrm{r} \leq |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| \leq \mathrm{R}\}$. Jika f analitik pada A, maka untuk setiap $z \in \mathrm{A}^0$ berlaku

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dengan,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} \; dan \; b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{-n+1}}$$

Bukti :

Menurut lemma, untuk setiap $z \in A^0$, berlaku

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} . \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} . \oint_C \frac{f(t)}{t - z_0} \; dt$$

Seperti pada deret Taylor, diperoleh

$$\frac{1}{2\pi i} . \oint_K \frac{f(t)}{t - z_0} dt = = \frac{f^n(z_0)}{n!} \; . \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} . \oint_K \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$$

Akan dicari

$$\frac{-1}{2\pi i} . \oint_K \frac{f(t)}{t-z} dt.$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{-1}{(z-z_0)-(t-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)-\left(1-\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$= \left[1 + \frac{t-z_0}{z-z_0} + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n}{1-\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)}\right]$$

oleh karena itu, diperoleh

$$\frac{-f(t)}{t-z} = \frac{f(t)}{t-z_0} + \frac{f(t)(t-z_0)}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{f(t)(t-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^2}$$

$$+ \frac{f(t)\left[\frac{t-z_0}{z-z_0}\right]^n}{t-z}$$

dan $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)\left[\frac{t-z_0}{z-z_0}\right]^n}{t-z} dt = 0.$

Akibatnya, diperoleh

$$= \frac{-1}{2\pi i} . \oint_C \frac{f(t)}{t - z} d = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

dengan,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} . \oint_C f(t)(t - z_0)^{n-1} = \frac{1}{2\pi i} . \oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n-1}} dt$$

Jadi, terbukti bahwa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} . \oint_K \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt \; dan \; b_n = \frac{1}{2\pi i} . \oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n-1}} dt$$

Penguraian deret teorema di atas dinamakan *deret Laurent f* pada z_0 dan annulus terbuka $r < |t - z_0| < R$ dinamakan annulus kekonvergenan deret.

Deret Laurenn dapat dituliskan dalam bentuk

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z - z_0)^n$$

dengan

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} . \oint_L \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dimana L sebarang lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif yang terletak di dalam annulus kekonvergenan dan memuat pusat penguraian z_0 di bagian dalamnya.

Contoh 5.9

Tentukan deret lauren dari $f(z) = \frac{1}{z-i}, z_0 = i$.

Solusi

$$f(z) = \sum_{n=-\sim}^{\infty} c_n (z - i)^n, (0 < |z - i| < \infty)$$

Dimana $c_{-2} = 1$ dan seluruh koefisien yang lain 0. Kita ketahui bahwa deret lauren adalah

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{dz}{(z - i)^{n+3}}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Dimana C lingkaran berorientasi positif $|z - i| = R$ dengan titik $z_0 = 1$,

Maka

$$\int_c \frac{dz}{(z - 1)^{n+3}} = \begin{cases} 0, \text{untuk } n \neq 2 \\ 2\pi i, \text{untuk } n = 2 \end{cases}$$

F. RANGKUMAN

1. Diberikan himpunan $A \subset C$. Barisan bilangan kompleks adalah suatu fungsi $f : N \rightarrow A$ yang di definisikan dengan $f(n) = z_n$ untuk setiap $n \in N$. Nilai–nilai fungsi f dengan $f(n) = z_n$ untuk setiap $n \in N$ dapat dinyatakan dengan

$f(1) = z_1$, $f(2) = z_2$, ...,$f(n) = z_n$. Fungsi f dengan $f(n) = z_n$ untuk setiap $n \in N$ adalah suatu barisan yang dapat dinyatakan dengan notasi $\{z_n\} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Bilangan–bilangan $z_1, z_2, \dots$ disebut suku–suku barisan dan suku z_n disebut suku umum (suku ke-n) barisan.

2. Teorema Ketunggalan Limit: Jika suatu barisan bilangan kompleks konvergen, maka barisan tersebut mempunyai limit tunggal.
3. Teorema penjumlahan dua barisan: Diberikan bilangan $z_n = x_n + iy_n$ untuk setiap $n \in N$ dan $z = x + iy$. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{z_n} = z$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} x_\mathrm{n} = x$ dan $\lim_{n\to\infty} \mathrm{y_n} = y$.
4. Deret bilangan kompleks dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{s_n} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ disebut deret tak berhingga (deret bilangan kompleks). Bilangan–bilangan $z_1, z_2, \dots$ dinamakan suku-suku deret, dan z_n dinamakan suku ke-n (suku umum). Barisan $\{\mathrm{s_n}\}$ dengan $\mathrm{s_n} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ dinamakan jumlah bagian ke n dari deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dikatakan konvergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} \mathrm{S_n} = S$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ dikatakan divergen ke S jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ tidak ada

5. Jika fungsi f analitik pada daerah terbuka $D = \{z: |z - z0| < r\}$, maka $f(z)$ untuk setiap $z \in D$ dapat dinyatakan ke dalam deret pangkat.

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, dengan $a_n = \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$

$$= f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!} (\mathrm{z} - \mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}$$

6. Deret Laurent: Diberikan C, K dua lintasan terhadap sederhana dengan $\mathrm{C} = \{\mathrm{t}: |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| = \mathrm{r}\}$ dan $\mathrm{K} = \{\mathrm{t}: |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| = \mathrm{R}\}$, dan $\mathrm{A} = \mathrm{Ann}(\mathrm{C}, \mathrm{K}) = \{\mathrm{t}: \mathrm{r} \leq |\mathrm{t} - \mathrm{z}_0| \leq \mathrm{R}\}$. Jika f analitik pada A, maka untuk setiap $z \in \mathrm{A}^0$ berlaku

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dengan,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} \; dan \; b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(t)}{(t - z_0)^{-n+1}}$$

G. LATIHAN

1. Tunjukkan bahwa $z_n = \frac{1}{1+nz}$ konvergen untuk $|z| \leq 2$!
2. Tentukan apakah barisan $z_n = \frac{1}{ni}$ konvergen atau tidak?
3. Tentukan apakah barisan $z_n = \frac{1}{2^{ni}}$ konvergen atau tidak?

4. Tunjukkan bahwa deret $z(1-z)+z^2(1-z)+z^3(1-z)+z^4(1-z)+\cdots$ konvergen untuk $|z|<1$ dan tentukan jumlahnya!.
5. Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n(n+1)}$ konvergen untuk $|z|\leq 1$!
6. Tentukan kekonvergenan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^2}{3i}z^i$!
7. Tentukan titik konvergen deret $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$!
8. Tunjukkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\theta = \frac{r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$!
9. Tunjukkan dengan deret mclaurin persamaan berikut!.
   a. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$
   b. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!}z^n + \cdots$
   c. $z\cosh(z^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{4n+1}}{(2n)!}$
10. Tentukan deret Laurent $f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right)$!
11. Tentukan deret Laurent $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$!
12. Tentukan deret Laurent $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$!
13. Tentukan deret Laurent $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+3)}$ dengan $1 < |z| < 3$!

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, R. P., Flaut, C., & O'Regan, D. (2018). *An Introduction to Real Analysis*. Taylor & Francis Group.

Ahlfors., L. V. (1979). *Complex Analysis: An Introduction to The Theory of Analitic Function of One Complex Variable*. McGraw-Hill.

Anam, K., Hidayati, W. S., & Rozak, A. (2022). Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal Nilai Mutlak Bilangan Kompleks. *Fourth Conference on Research and Community Services STKIP PGRI Jombang Transformasi Pendididkan Berbasis Hasil Penelitian Dan Pengabdian Masyarakat Di Era Merdeka Belajar, September*, 213–225.

Bartle, R., G., & Sherbert, D., R. (2000). *Introduction to Real Analysis (Third Edition)*. Jhon Wiley & Sons Ltd.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). *Complex Variables and Aplications (Eighth Edition)*. McGraw-Hill.

Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2014). *Complex Variables and Aplications (Ninth Edition)*. McGraw-Hill.

Dedy, & Sumiaty. (2001). *Fungsi Variabel Kompleks*. Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UPI.

Undnag-Undang RI Nomor 20, Tahun 2003, Tentang Sistem Pendidikan Nasional., (2003).

Gunawan, W. (1987). *Peubah Kompleks Untuk Ilmuwan dan Insinyur*. Erlangga.

Hjab, O. (2016). *Introduction to Calculus and Classical Analysis*. Springer International Publishing.

Jhonston-wilder, S., Jhonston-wilder, P., & David, P. (2011). *Learning to teach mathematics in the secondary school: a companion to school experience*. Reutledge Taylor and francis group.

Martono, K. (1964). *Peubah Kompleks*. Erlangga.

Morris, C. C., & Stark, R. M. (2016). *Fundamentals of Calculus*. Jhon Wiley & Sons Ltd.

NCTM. (2000). *Principless and Standards for School Mathematics*. NCTM.

Pathak, H. K., Agarwal, R. P., & Cho, Y. J. (2016). *Function of A Complex Variable*. Taylor & Francis Group.

Quita, R. M. (2014). *Sejarah Bilangan Kompleks*. Majalah 1000guru. http://majalah1000guru.net/2014/05/bilangan-kompleks/

Rivai, V., & Murni, S. (2010). *Education management: analisis teori dan praktik*. PT Raja Grafindo Persada.

Soemanto, R. (1994). *Fungsi Variable Kompleks*. Jurusan Matematika UNNES.

Spiegel, M. R. (2005). *Schaum's Outline of Theory and Problems of Complex Variabel*. McGraw-Hill.

Stromberg, K. R. (2015). *An introduction to classical real analysis* (Vol. 376). American Mathematical Soc.

Wahyuni, A., & Hidayati, D. W. (2020). Analisis kemampuan pemahaman matematis pada mata kuliah kalkulus peubah banyak. *Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika (JIPM)*, *2*(2), 142–147. https://doi.org/10.37729/jipm.v2i2.6721

Wahyuni, I., & Kharimah, N. I. (2017). Analisis Kemampuan Pemahaman dan Penalaran Matematis Mahasiswa Tingkat IV Materi Sistem Bilangan Kompleks pada Mata Kuliah Analisis Kompleks. *JNPM (Jurnal Nasional Pendidikan Matematika)*, *1*(2), 228. https://doi.org/10.33603/jnpm.v1i2.608

Wahyuni, T., Sri Hidayati, W., Rozak, A., & PGRI Jombang, S. (2022). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Fungsi Variabel Kompleks Ditinjau Dari Gaya Kognitif. *Fourth Conference on Research and Community Services STKIP PGRI Jombang Transformasi Pendididkan Berbasis Hasil Penelitian Dan Pengabdian Masyarakat Di Era Merdeka Belajar, September*, 424–433.

BIODATA PENULIS

M. Syawahid, lahir di Desa Kekait, Kecamatan Gunungsari-Lombok Barat, Nusa Tenggara Barat pada tanggal 23 Desember 1987. Menempuh pendidikan dasar di MI At-Tahzib Kekait pada tahun 2000, pendidikan menengah pertama di MTs At-Tahzib Kekait tahun 2003; pendidian menengah atas di MA Al-Ishlahuddiny, Kediri-Lombok Barat, NTB tahun 2006; pendidikan tinggi strata 1 (S1) di IAIN Mataram tahun 2010, pendidikan tinggi strata 2 (S2) di Universitas Negeri Yogyakarta (UNY) tahun 2013, dan pendidikan tinggi strata 3 (S3) di Universitas Negeri Malang (UM). Terhitung bulan maret 2015, ia diamanahkan menjadi Aparatur Sipil Negera (ASN) sebagai Dosen Tetap di Program Studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Keguruan (FTK) Universitas Islam Negeri (UIN) Mataram. Karya Ilmiah yang pernah di terbitkan diantaranya: Pengembangan Perangkat Pembelajaran SMP Terintegrasi dengan Pengembangan Kecerdasan Emosional dan Spiritual; Kemampuan Berfikir Formal Mahasiswa, Kemampuan literasi matematika siswa SMP ditinjau dari gaya belajar, *Elementary students' functional thinking: From recursive to correspondence*, *Elementary students' functional* *thinking in solving context-based linear pattern problems*, Penalaran Aljabar Mahasiswa Calon Guru Matematika Dalam Pemecahan Masalah Matematika Menggunakan PISA Framework, dan beberapa karya lainnya.

.